



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov. Aplicación a la detección de caos.

Áurea Mene Hevia

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

**Cálculo de los exponentes  
característicos de Lyapunov.  
Aplicación a la detección de caos.**

Áurea Mene Hevia

07/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



*Dedicado a:*  
*Jerónimo Rodríguez García por su atención y esfuerzo*  
*en la realización de este trabajo y por enseñarme grandes cosas.*  
*Mi familia y mi pareja por su gran apoyo durante estos años de sacrificio.*



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento: Matemática aplicada</b>
<b>Título: Cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov. Aplicación a la detección de caos.</b>
<b>Breve descripción do contido</b>
Descripción de una herramienta que nos permite detectar órbitas caóticas, que será el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov. Aplicaciones de los mismos.
<b>Recomendacións</b>
Se recomienda haber superado las materias del Grado en Matemáticas relacionadas con las ecuaciones diferenciales ordinarias y con su resolución numérica.
<b>Outras observacións</b>





# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Resultados básicos para EDOs</b>	<b>1</b>
1.1. Definición del problema de valor inicial . . . . .	1
1.2. Existencia y unicidad de solución . . . . .	2
1.3. Dependencia con respecto a las condiciones iniciales . . . . .	2
<b>2. Integradores para problemas de valor inicial</b>	<b>5</b>
2.1. Método de Euler explícito . . . . .	6
2.2. Runge-Kutta explícitos . . . . .	8
2.3. Paso de tiempo adaptativo . . . . .	10
2.3.1. Runge-Kutta encajados . . . . .	10
2.3.2. ODE45.Dormand-Prince . . . . .	13
<b>3. Cálculo de los exponentes de Lyapunov</b>	<b>15</b>
3.1. Motivación e introducción . . . . .	15
3.2. Exponentes característicos de Lyapunov . . . . .	18
3.2.1. Cálculo de los LCE . . . . .	22
3.3. Exponentes de Lyapunov de orden superior . . . . .	24
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>29</b>
4.1. Atractor de Lorenz . . . . .	29
4.2. Rössler . . . . .	36
4.3. HyperChaos . . . . .	38
<b>Apéndices</b>	<b>45</b>
<b>Álgebra exterior</b>	<b>47</b>

<b>Códigos de programación</b>	<b>49</b>
.0.1. Cálculo de los exponentes . . . . .	49
.0.2. Algoritmo Gram-Schmidt modificado . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>





## Resumen

Los sistemas dinámicos denominados caóticos se asocian con frecuencia a sistemas muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Los exponentes característicos de Lyapunov (LCE del inglés Lyapunov Characteristic Exponents) son una herramienta que permite cuantificar la velocidad a la que se separan dos órbitas con condiciones iniciales infinitamente cercanas. Por ello, con frecuencia se emplean como indicadores de la presencia de caos. El presente trabajo se centra en el estudio de los LCE con el objeto de aplicarlos a la detección de órbitas caóticas en un sistema dinámico. Se estructurará del siguiente modo:

- Definición e interpretación geométrica de los LCE.
- Técnicas que permiten calcular numéricamente los LCE.
- Implementación de algunas de las técnicas presentadas en el apartado anterior.
- Cálculo efectivo de los LCE para algunos sistemas dinámicos relevantes como el sistema de Lorenz, el sistema de Rössler o Hyperchaos.

Para poder abordar el último punto se necesitarán integradores de orden elevado compatibles con paso de tiempo adaptativo.

## Abstract

The so-called chaotic dynamic systems are often associated with systems that are very sensitive to variations in initial conditions. The Lyapunov Characteristic Exponents are a tool that allows to quantify the speed at which two orbits with infinitely close initial conditions get away from each other. Therefore, they are often used as indicators of the presence of chaos. The present work focuses on the study of the LCE in order to apply them to the detection of chaotic orbits in a dynamic system. It will be structured as follows:

- Definition and geometric interpretation of the LCE.
- Techniques that allow the LCE to be calculated numerically.

- Implementation of some of the techniques presented in the previous section.
- Effective calculation of the LCE for some dynamic systems such as the Lorenz system, Rössler or Hyperchaos system.

To be able to address the last point, high order integrators compatible with adaptive time step will be needed.

# Introducción

En este trabajo trataremos de estudiar y desarrollar una herramienta que nos permita detectar órbitas caóticas. Nos contentaremos con la comprobación de la propiedad más característica: la alta sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales. La herramienta que se ha seleccionado son los exponentes característicos de Lyapunov tal y como veremos a lo largo del documento, para una ecuación diferencial ordinaria en  $\mathbb{R}^n$ , se trata de  $n$  números que indicarán el acercamiento o alejamiento de las órbitas asociadas por perturbaciones infinitesimales de una órbita dada (en escala logarítmica). En este sentido se considera que una órbita acotada con al menos un exponente característico de Lyapunov positivo es caótica.

En los algoritmos iniciales del cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov eran capaces de calcular el mayor de ellos siendo el cálculo del resto muy sensible a errores numéricos, en la práctica imposible.

En esta memoria estudiaremos e implementaremos uno de los primeros algoritmos que permite calcular todos los exponentes característicos de Lyapunov. Esta técnica desarrollada por Benetin [8] introducirá los exponentes característicos de Lyapunov de orden elevado.

A continuación describimos lo que sigue en el documento.

En el primer capítulo presentaremos algunas definiciones y resultados básicos relativos a la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias [1], que estarán de algún modo relacionados con los exponentes característicos de Lyapunov.

En el segundo capítulo presentaremos alguna noción básica a lo que se refiere a los integradores temporales avanzados que se usarán para la integración numérica de las ecuaciones (Runge-Kutta explícitos encajados con paso de tiempo adaptativo) [2].

En el tercer capítulo se encuentra lo grueso del estudio realizado, en el que se introduce el concepto de exponentes característicos de Lyapunov de manera constructiva, tras deducir algunas propiedades básicas de los mismos se presentan las ideas fundamentales del algoritmo que permite calcularlos.

En el cuarto capítulo se aplica esta técnica al cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov de ecuaciones diferenciales ordinarias paramétricas conocidas por la presen-

cia de caos para algunos de los valores de los parámetros; nos referimos a los sistemas de Lorenz [3], Rössler [4] e Hyperchaos [5]. Para alguno de ellos se ha utilizado estos exponentes para observar los valores de los parámetros para los cuales se produce un cambio de comportamiento (diagramas de bifurcación).

El documento finaliza con un anexo en el que se incluyen los códigos generados, algún concepto técnico de utilidad sobre el álgebra exterior y una sección de referencias.



# Capítulo 1

## Resultados básicos para EDOs

En este trabajo vamos a centrarnos en el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov, que son un indicador cualitativo de la sensibilidad frente al cambio de las condiciones iniciales. Antes de introducir estas magnitudes, que se harán en el capítulo 3, introduciremos algunos resultados básicos sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias que relacionaremos con los exponentes.

Especial mención deben de recibir los resultados relativos a la continuidad y diferenciabilidad con respecto a las condiciones iniciales y en especial, y relacionado con este último concepto, cabe mencionar la ecuación variacional, es decir, el sistema linealizado, que es de especial importancia para el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov. En este capítulo seguiremos el libro [1].

### 1.1. Definición del problema de valor inicial

**Definición 1.1.** Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1.1}$$

con  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , junto con un punto  $(t_0, x_0) \in E$  llamada condición inicial.

**Definición 1.2.** Sea el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Una solución para dicho problema será una función  $x(t)$  diferenciable en un intervalo  $I \forall t \in I$ ,  $x(t) \in E$ , que es una solución de la ecuación diferencial (1.1) que satisface  $x(t_0) = x_0$  con  $t_0 \in I$ .

## 1.2. Existencia y unicidad de solución

Para garantizar que el problema de valor inicial (1.2) tenga una única solución vamos a dar unas hipótesis previas sobre la función  $f$  que denotaremos por  $Hf$ .

**Hipótesis  $Hf$ :**

1. La función  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  debe de ser continua en ambas variables, es decir,  $f \in \mathcal{C}(E \times \mathbb{R}^n)$ .

2.  $f$  tiene que ser Lipschitziana globalmente, es decir,  $\exists L \geq 0$  constante, tal que  $\|f(x) - f(\bar{x})\| \leq L\|x - \bar{x}\| \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Bajo estas condiciones tendremos una única solución  $x(t) \in \mathcal{C}^1(I)$ .

**Teorema 1.3.** *Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad*

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y supongamos que  $f$  verifica las hipótesis  $Hf$ . Entonces el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

tiene una única solución  $x(t)$  en todo  $\mathbb{R}$ .

**Observación:** Nótese que la hipótesis sobre  $f$  de ser globalmente lipschitziana es más fuerte que la hipótesis habitual de ser localmente lipschitziana. Se ha considerado esta hipótesis más fuerte por los siguientes motivos: Para simplificar el discurso, para justificar el buen funcionamiento de los métodos numéricos y por último para los casos en los que  $f$  sea localmente lipschitziana se puede generar una función  $\bar{f}$  que en un entorno de las condiciones iniciales coincide con la  $f$  original y es globalmente lipschitziana, esto proporcionará un resultado de existencia y unicidad local para la  $f$  original.

## 1.3. Dependencia con respecto a las condiciones iniciales

Dado que en este trabajo nos interesamos por la evolución de dos trayectorias con condiciones iniciales similares comenzamos enunciando algún resultado básico de la teoría cualitativa de la dependencia respecto a las condiciones iniciales.

**Teorema 1.4.** *Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y sea  $f$  verificando las hipótesis  $Hf$ . Supongamos que el problema de valor inicial (1.2) tenga solución  $x(t, x_0)$  definida en el intervalo cerrado  $I$ . Entonces existe  $\delta > 0$  y una constante positiva  $L$  tal que para todo  $y \in N_\delta(x_0)$  el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = y, \end{cases}$$

tiene una única solución  $x(t, y)$  definida en  $I$ , la cual satisface

$$\|x(t, y) - x(t, x_0)\| \leq e^{Lt} \|y - x_0\|$$

y

$$\lim_{y \rightarrow x_0} x(t, y) = x(t, x_0)$$

uniformemente para todo  $t \in I$ . Nótese que  $L$  es la constante de Lipschitz de las hipótesis  $Hf$ .

Este teorema nos proporciona el primer resultado cualitativo que nos aporta continuidad y que la dependencia temporal depende de una constante  $K$  que está relacionada con la constante de Lipschitz de la función  $f$ . Nuestro objetivo será calcular una magnitud que nos permita calcular una estimación similar a esta de tipo cualitativo y que veremos en el capítulo 3, para ello utilizaremos el corolario 1.6 que jugará un papel muy importante.

**Observación.** Mencionar que el anterior teorema no suele ser óptimo en la práctica. Véase con el siguiente ejemplo:

Tengamos la siguiente ecuación diferencial

$$x' = 2x, \tag{1.4}$$

Entonces  $\|f(x) - f(\bar{x})\| = 2\|x - \bar{x}\|$  cuya constante de Lipschitz es 2 y el comportamiento de  $\|x(t, (t_0, x_0)) - x(t, (t_0, \bar{x}_0))\|$  viene dado por  $e^{2t}(x_0 - \bar{x}_0)$  con lo que su estimación es bastante precisa. Sin embargo, si tomamos esta otra ecuación diferencial

$$x' = -2x, \tag{1.5}$$

la constante de Lipschitz es nuevamente 2 pero el comportamiento de  $\|x(t, (t_0, x_0)) - x(t, (t_0, \bar{x}_0))\|$  viene dado por  $e^{-2t}(x_0 - \bar{x}_0)$  con lo cual la estimación resulta ser muy pobre por lo tanto necesitaremos buscar un resultado cualitativo que nos solvete estos errores.

**Teorema 1.5.** *Dependencia con respecto a las condiciones iniciales*

Sea  $E$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene a  $x_0$  y supongamos que  $f$  verifica las hipótesis  $Hf$  y  $f \in C^1(E)$ . Entonces existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in N_\delta(x_0)$  el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = y, \end{cases} \tag{1.6}$$

tiene una única solución  $x(t, y)$  con  $x \in C^1(G)$  donde  $G = \mathbb{R} \times N_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Además para cada  $y \in N_\delta(x_0)$ ,  $x(t, y)$  es dos veces continuamente diferenciable respecto de  $t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ .

La demostración del anterior teorema se puede ver en [1] de la cual se deduce el siguiente corolario.

**Corolario 1.6.** *Bajo las hipótesis del anterior teorema,*

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial x}{\partial y}(t, y),$$

con  $t \in I$  e  $y \in N_\delta(x_0)$  si y solo si  $\Phi(t, y)$  es la matriz solución de

$$\begin{cases} \Phi'(t, y) = Df[x(t, y)]\Phi, \\ \Phi(t_0, y) = Id, \end{cases} \quad (1.7)$$

con  $t \in I$ ,  $y \in N_\delta(x_0)$  y donde  $Id$  denota la matriz identidad y  $Df$  denota la matriz jacobiana evaluada en la solución de (1.6).

**Observación.** El sistema que se plantea en (1.7) a pesar de que es un sistema lineal, no es autónomo cuya dependencia temporal se produce a través de la solución del sistema no lineal por lo que su resolución va a ser difícil, ya que vamos a necesitar resolver a la par el sistema linealizado con el no lineal. Esto nos va a resultar muy costoso computacionalmente.

## Capítulo 2

# Integradores para problemas de valor inicial

Para el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov se requerirá resolver la ecuación diferencial ordinaria no lineal, así como el sistema linealizado alrededor de la órbita. Esta tarea en general no puede realizarse con métodos analíticos con lo cual procederemos a realizarlos con métodos numéricos. Para ello contaremos con métodos de integración para problemas de valor inicial, centrándonos en métodos explícitos por su sencillez. Para este capítulo seguiremos el libro [2] y los apuntes de la asignatura Métodos Numéricos en Optimización y Ecuaciones Diferenciales del Grado en Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela.

Dado el siguiente problema de valor inicial

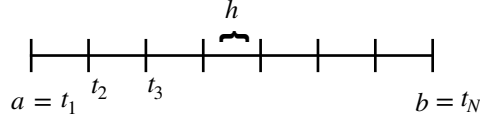
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

nuestro objetivo es buscar una solución  $x(t)$  a dicho problema. Además bajo las hipótesis  $Hf$  mencionadas en el capítulo anterior tenemos que la solución será única y que  $x(t) \in \mathcal{C}^1(I)$ .

Los métodos numéricos que resuelven (2.1) no nos proporcionan la solución exacta del problema sino que nos dan una aproximación de esta. El funcionamiento de estos métodos numéricos es el siguiente:

En primer lugar se realiza una malla del intervalo  $I = [a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  y posteriormente se calculan las aproximaciones de la solución exacta en los diferentes nodos equispaciados por un paso  $h$ .

$$t_n = a + (n - 1)h, \quad n = 1, \dots, N$$



$h = \frac{b-a}{N-1}$ , que se conoce como *stepsize*.

Es decir, lo que se pretende es calcular aproximaciones de la solución exacta en los diferentes nodos, aproximaciones de  $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ . Con lo cual tendremos lo siguiente,

$$x_n \approx x(t_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

## 2.1. Método de Euler explícito

El método de Euler explícito tiene la siguiente estructura,

$$\begin{cases} x_1 = x_0, \\ x_{n+1} = x_n + hf(x_n), \quad n = 1, \dots, N-1, \end{cases} \quad (2.2)$$

Una de las interpretaciones de este método se basa en la definición de la derivada pues,

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} \quad \text{si } h \text{ es pequeño.}$$

Entonces,

$$f(x(t_n)) \approx \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h},$$

que es la definición de la primera derivada.

De lo que se deduce lo siguiente,

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + hf(x(t_n)) \quad \text{si } h \text{ es pequeño.}$$

Por otra parte el orden de convergencia de este método es 1. Se verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \max_{n \in \{1, \dots, N\}} \|x_n - x(t_n)\| \right) = 0,$$

donde  $\max_{n \in \{1, \dots, N\}} \|x_n - x(t_n)\| = \Theta(h)$ , es decir, el método es convergente. El error se comporta de forma lineal con respecto a  $h$ , como una constante real positiva  $C$  que multiplica a  $h$ .

Para finalizar esta sección vamos a realizar un análisis de la convergencia del Euler explícito bajo las hipótesis  $Hf$ .

**Definición 2.1.** Definimos el error local de discretización en  $t_{n+1}$  como

$$T_{n+1} = h\tau_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1,$$

donde

$$\tau_{n+1} = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{h} - f(x(t_n)), \quad n = 1, \dots, N-1,$$

siendo  $x(t)$  una solución de la EDO  $x' = f(t, x)$ .

**Proposición 2.2.** Supongamos las hipótesis  $Hf$ .

1.  $\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{2 \leq n \leq N} \|\tau_n\|) = 0$  para cualquier solución  $x(t)$  de la EDO  $x' = f(t, x)$ . Que un método verifique este primer punto nos indica que el método es consistente.
2. Si  $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , entonces  $\max_{2 \leq n \leq N} \|\tau_n\| = \Theta(h)$ .

Cabe preguntarse si en la estructura del método de Euler explícito realizamos dos pequeñas perturbaciones del original si obtendremos soluciones parecidas.

**Proposición 2.3.** Supongamos las hipótesis sobre  $Hf$ .

Sea el primer sistema perturbado:

$$\begin{cases} z_1 = \eta \\ \frac{z_{n+1} - z_n}{h} = f(z_n) + \delta_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.3)$$

El segundo sistema perturbado:

$$\begin{cases} \bar{z}_1 = \bar{\eta} \\ \frac{\bar{z}_{n+1} - \bar{z}_n}{h} = f(\bar{z}_n) + \bar{\delta}_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Entonces se tiene que

$$\max_{1 \leq n \leq N} \|z_n - \bar{z}_n\| \leq e^{L(b-a)} h \sum_{n=2}^N \|\delta_n - \bar{\delta}_n\|.$$

Siendo  $L$  la constante de Lipschitz de las hipótesis  $Hf$ .

Por lo tanto el método de Euler explícito es estable, es decir, una pequeña perturbación en el problema no afecta notablemente a la solución del mismo, es decir ambas soluciones se van a mantener cerca.

**Proposición 2.4.** Si un método es consistente y estable entonces el método será convergente.

**Teorema 2.5.** Convergencia del Euler explícito.

Bajo las hipótesis de  $Hf$ .

1.  $\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{1 \leq n \leq N} \|x_n - x(t_n)\|) = 0$
2. Si  $x \in \mathcal{C}^2([a, b])$ , entonces  $\max_{1 \leq n \leq N} \|x_n - x(t_n)\| = \Theta(h)$ . (Orden de convergencia 1).

## 2.2. Runge-Kutta explícitos

Como vimos en la anterior sección el método de Euler explícito es un método con orden de convergencia 1. Si nos interesamos por métodos de alto orden podemos pensar en los métodos Runge-Kutta (RK).

Los métodos de tipo Runge-Kutta son métodos de un solo paso, y son aquellos que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad s \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde,

$$k_i = f(x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j),$$

Lo que caracteriza el orden de un método Runge-Kutta es el error del método, que tiene la siguiente forma

$$Error \equiv Ch^k,$$

donde  $C$  es una constante real positiva y  $k$  es el orden del método.

Por otra parte  $s$  denota el número de etapas del Runge-Kutta, es decir, el número de veces que se evalúa la función en cada paso. Este concepto es importante porque la evaluación de la función requiere un coste computacional, por esta razón son preferidos los métodos con un número mínimo de etapas como sea posible.

Una característica interesante de los métodos Runge-Kutta es que no es necesario calcular derivadas de  $f$  para avanzar, a cambio el precio a pagar consiste en evaluar más veces la función con el consiguiente coste computacional.

Es habitual presentar este método con las tablas de Butcher.

$c_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$		$a_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c_s$	$a_{s1}$	$\dots$	$a_{ss}$
<hr/>			
	$b_1$	$\dots$	$b_s$

Figura 2.1: Estructura de una tabla de Butcher

**Observación:** Nótese que al considerar sistemas autónomos, el vector  $c$  de la figura 2.1 no juega ningún papel. Consideramos de todos modos métodos Runge-Kutta que cumplan



la llamada condición de fila, es decir,

$$c_i = \sum_j a_{ij}.$$

Ver [2] para las implicaciones correspondientes.

**Definición 2.6.** Un Runge-Kutta se dice explícito si la matriz  $A$  de la tabla de Butcher es una matriz triangular inferior ( $a_{ij} = 0$  si  $i \leq j$ ).

Las fórmulas explícitas serían las siguientes:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n) \\ k_2 = f(x_n + ha_{21}k_1) \\ \vdots \\ k_s = f(x_n + h[a_{s1}k_1 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}]) \end{cases} \quad (2.6)$$

**Proposición 2.7.** Una condición necesaria y suficiente para que el método sea convergente es que  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ .

Algunos ejemplos de los métodos Runge-Kutta más importantes son:

0	0
1	1

Figura 2.2: Tabla de Butcher Euler explícito

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	2/6	2/6	1/6

Figura 2.3: Tabla de Butcher Runge-Kutta clásico

Este último es un Runge-Kutta clásico de orden 4, es decir,  $Error(h) = ch^4$ .

### 2.3. Paso de tiempo adaptativo

Podemos preguntarnos que tamaño de paso  $h$  es necesario. La respuesta depende del problema específico que estemos estudiando, el grado de precisión requerido y el coste en tiempo que estemos dispuestos a pagar.

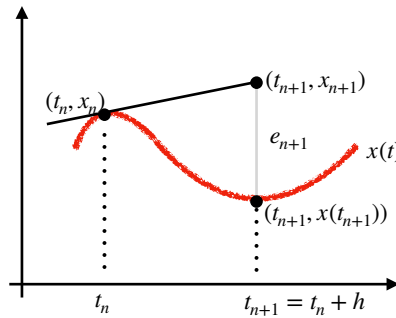
Algo importante a tener en cuenta en los métodos Runge-Kutta es que hay cierta pérdida de precisión cuando la derivada de la función es grande o bien cuando cambia frecuentemente de signo, en dichos casos se requiere tomar un tamaño de paso menor para obtener el grado de precisión requerido. En la siguiente subsección veremos los pares de Runge-Kuttas encajados de Fehlberg, métodos en los cuales el tamaño del paso se ajusta automáticamente dependiendo principalmente de los cambios de la derivada de la función.

#### 2.3.1. Runge-Kutta encajados

Dado la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_n) = x_n, \end{cases} \quad (2.7)$$

tenemos la siguiente situación, donde  $x(t)$  denota la solución exacta de la ecuación diferencial.



Podemos escoger el método de Euler explícito para resolver la EDO, pues es el método más simple dentro de los Runge-Kutta. Por consiguiente, tendremos el siguiente esquema numérico

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Como es un método de un solo paso podemos escoger el  $h$  que queramos en las próximas veces que integremos. Además, como es un Runge-Kutta de orden  $p = 1$  tendremos que el

orden del error local será de orden  $p + 1$

$$e_{n+1} = |x(t_{n+1}) - x_{n+1}|,$$

$$e_{n+1} \approx C_{n+1}h^{p+1} + \Theta(h^{p+2}).$$

Fijada una tolerancia, que denotaremos por  $tol$ , queremos que nuestro método tenga una precisión tal que el error local sea como mínimo esa tolerancia. Además si  $h$  es pequeño podemos despreciar la cantidad  $\Theta(h^{p+2})$  y por lo tanto tener

$$e_{n+1} \approx C_{n+1}h^{p+1}.$$

Debido a las circunstancias puede ocurrir que el  $h$  que fijamos haga que  $e_{n+1} > tol$  por lo tanto debemos escoger otro  $h$ . Para ello podemos calcular un paso óptimo que proporcione  $e_{n+1} \equiv tol$ . Entonces tendremos

$$h_{opt} = k_{opt}h.$$

Con lo cual,

$$C_{n+1}h_{opt}^{p+1} = tol \Rightarrow C_{n+1}k_{opt}^{p+1}h^{p+1} = tol \Rightarrow k_{opt} = \sqrt[p+1]{\frac{tol}{e_{n+1}}}.$$

Ahora bien, tenemos dos posibilidades:

1. Si  $e_{n+1} \leq tol$ , entonces guardamos el cálculo como bueno, estaremos en  $(t_{n+1}, x_{n+1})$  y seguiremos integrando con  $h_{opt}$ .
2. Si  $e_{n+1} > tol$ , entonces rechazamos el paso y volvemos a integrar desde  $(t_n, x_n)$  con  $h_{opt}$ .

Como siempre estamos con el óptimo puede ser que si tomamos un paso “grande” entonces tengamos la necesidad de calcular un nuevo  $k_{opt}$  al que llamaremos  $k_{new}$ , es decir, en realidad en ambos casos se integrará con

$$h_{new} = k_{new}h,$$

donde

$$k_{new} = \min(k_{\max}, \max(k_{\min}, k_{opt} \cdot factor))$$

y  $factor$  es un número que generalmente tiene el valor de 0.8, este valor nos sirve para no rechazar los pasos de forma excesiva, pues rechazar el paso supone un coste computacional caro, ya que nos obliga a realizar más evaluaciones. Entonces como queremos un  $h$  cercano al óptimo, es preferible que este sea más pequeño y evitar rechazar el paso, esta es la funcionalidad del  $factor$ .

En la práctica se desea trabajar con integradores de orden más elevado que el Euler explícito, por otra parte se desconoce  $x(t_{n+1})$  y  $C_{n+1}h^{p+1}$  con lo cual no sería posible estimar el error y en consecuencia adaptar el paso. Es por ello por lo que se considerará otro Runge-Kutta de orden mayor para poder estimar el error (la solución más precisa de orden superior se considerará en la práctica como exacta). De cara a obtener un procedimiento no excesivamente caro computacionalmente hablando se seleccionan métodos Runge-Kutta que compartan la mayor parte de los coeficientes, es decir, ambos métodos comparten la matriz  $A$  y el vector  $c$  de sus tableros de Butcher, teniendo únicamente el vector  $b^t$  de diferencia, (ver figura 2.4). Estos métodos se llaman Runge-Kutta encajados.

Uno de los Runge-Kutta encajados más conocidos es el propuesto por Fehlberg de orden  $p + 1$ ,  $p$  respectivamente, o los propuestos por Dormand y Prince.

$c_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$		$a_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$c_s$	$a_{s1}$	$\dots$	$a_{ss}$
<hr/>			
	$b_1$	$\dots$	$b_s$
	$\bar{b}_1$	$\dots$	$\bar{b}_s$

Figura 2.4: Tabla de Butcher para Runge-Kutta encajados

La idea del par encajado de Fehlberg es que llegado a un nodo utiliza el método de mayor orden ( $p + 1$ ) para estimar el error y el de menor orden ( $p$ ) para aceptar el paso y avanzar. Es decir, tenemos la siguiente situación

$$(t_n, x_n) \xrightarrow{q > p} (t_{n+1}, \bar{x}_{n+1})$$

$$(t_n, x_n) \xrightarrow{p} (t_{n+1}, x_{n+1})$$

y reemplazamos  $x(t_{n+1})$  por  $\bar{x}_{n+1}$ , es decir  $p$  ve como solución exacta la de  $q$  y se guarda la menos precisa.

Resumiendo, tomamos un paso  $h$  y elegimos un valor máximo aceptable para el error que denotaremos por  $tol$ . En primer lugar calculamos la solución con el método 1 y el método 2 y aceptamos como solución exacta la del método 1, que es el de mayor orden. Posteriormente calculamos el error y si este es menor que  $tol$ , entonces tomamos como solución la aportada del método 2 (la menos precisa) y avanzamos haciendo  $h$  un poco más

grande. En caso contrario, si el error es mayor que  $tol$ , entonces rechazamos el resultado obtenido y tomamos un paso  $h$  más pequeño y repetimos el proceso.

Como vemos lo que buscamos es que el tamaño del paso  $h$  vaya variando en función de la estimación obtenida. De esta manera ahorramos tiempo y coste computacional en cada paso de tiempo y así tomando un paso más pequeño donde solo sea necesario.

Para finalizar tenemos que los cálculos previos para los Runge-Kutta encajados serán los siguientes:

Para ambos RK,

$$k_{n,i} = f\left(x_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{n,j}\right).$$

Para el primer RK

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_{n,i}.$$

Para el segundo RK

$$\bar{x}_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^s \bar{b}_i k_{n,i}.$$

Y además se verifica

$$e_{n+1} \cong \bar{x}_{n+1} - x_{n+1} = h \sum_{i=1}^s (\bar{b}_i - b_i) k_{n,i}.$$

### 2.3.2. ODE45.Dormand-Prince

Los ejemplos que mostraremos en los siguientes capítulos fueron realizados con una programación en MATLAB , usando un integrador para EDOs llamado ODE45 cuya finalidad consiste en integrar un sistema de ecuaciones diferenciales en un período de tiempo fijado (desde  $t_0$  hasta  $t_{final}$ ) con unas condiciones iniciales determinadas.

Este integrador es un método de un solo paso, es decir  $x(t_n)$  solo necesita la solución en el punto de tiempo anterior  $x(t_{n-1})$ . ODE45 está basado en un método de Dormand-Prince, cuyo par de Runge-Kutta está formado por uno de orden 4 y otro de orden 5. Es decir, al contrario que Fehlberg, usa el método de orden 5 para avanzar en cada paso y el método de orden 4 para estimar el error. En conclusión, este método toma como solución la aportada del método de mayor orden, la más precisa, pues consideran que ya que hemos calculado la solución más precisa porqué no quedarse con ella.

Finalmente Dormand y Prince escogieron los coeficientes de su método para minimizar el error de la solución de quinto orden. Esta es la principal diferencia con otros métodos, entre ellos el de Fehlberg, que se construyó de modo que la solución de cuarto orden tenga un error pequeño.



## Capítulo 3

# Cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov

### 3.1. Motivación e introducción

Deseamos disponer de una herramienta que nos permita determinar si una órbita asociada a un problema de valor inicial es caótica. Por lo de pronto no existe un consenso global que defina el concepto de órbita caótica pero parece que todas las alternativas asumen como necesario una alta sensibilidad ante perturbaciones en las condiciones iniciales.

Para ser más precisos, en presencia de caos dos órbitas asociadas a dos condiciones iniciales infinitamente cercanas podrían alejarse exponencialmente rápido en un corto período de tiempo. Con frecuencia, cuando una órbita acotada tiene esta propiedad, alta sensibilidad a las condiciones iniciales, se admite que es caótica.

Una herramienta que permite estimar este comportamiento es el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov, pues cuando existe un exponente característico de Lyapunov positivo obtendremos que la órbita es caótica. Esta es la razón por la que se emplean frecuentemente como detector de caos.

Supongamos que deseamos analizar una órbita dada por el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

cuya solución denotaremos por  $x(t, (t_0, x_0))$ .

Para un tiempo  $\bar{t}$  la solución pasará por un punto  $\bar{x} = x(\bar{t}, (t_0, x_0))$  (ver teorema 1.3). Nótese que, bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre  $f(\cdot)$  tenemos la siguiente igualdad

$$x(t, (t_0, x_0)) = x(t, (\bar{t}, \bar{x})). \quad (3.2)$$

A continuación consideramos una perturbación infinitesimal de la nueva condición inicial  $(\bar{t}, \bar{x})$  en la dirección unitaria  $\bar{v}$ . De este modo tenemos una nueva solución

$$x(t, (\bar{t}, \bar{x} + \delta \bar{v})). \quad (3.3)$$

Nos planteamos a qué velocidad evoluciona la distancia entre ambas órbitas en tiempos cercanos a  $\bar{t}$ , comparada a la distancia inicial en  $\bar{t}$  dada por  $\delta$ , es decir,

$$\frac{1}{\delta} \|x(t, (\bar{t}, \bar{x} + \delta \bar{v})) - x(t, (\bar{t}, \bar{x}))\|, t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon). \quad (3.4)$$

Dado que supondremos los tiempos cercanos a  $\bar{t}$  y las perturbaciones son pequeñas sabemos que

$$x(t, (\bar{t}, \bar{x} + \delta \bar{v})) = x(t, (\bar{t}, \bar{x})) + \delta \Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v} + \Theta(\delta^2),$$

con lo cual la magnitud a estudiar se comporta como

$$\|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\|, t \in (\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon). \quad (3.5)$$

En las anteriores expresiones la función matricial  $\Phi(t, (\bar{t}, \bar{\Phi}))$ , está caracterizada por ser la solución del siguiente problema de valor inicial matricial lineal con coeficientes variables, no autónomo,

$$\begin{cases} \Phi'(t) = D_x f(x(t)) \Phi(t), \\ \Phi(\bar{t}) = \bar{\Phi}, \end{cases} \quad (3.6)$$

donde

$$D_x f(x(t)), \quad (3.7)$$

es la matriz jacobiana de  $f$  evaluada en  $x \equiv x(t, (t_0, x_0))$ .

Hacemos notar que la función en (3.5) adquiere el valor 1 en  $t = \bar{t}$ . De cara a estudiar la convergencia (o divergencia) de ambas órbitas realizamos, para  $t$  suficientemente pequeño, la siguiente identificación

$$\|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\| \equiv e^{\lambda^i(t-\bar{t})} \quad (3.8)$$

que de algún modo define a  $\lambda^i \equiv \lambda^i(\bar{t}, \bar{v})$ . Esto motiva la siguiente definición

**Definición 3.1.** Dado  $\bar{t}$  y  $\bar{v}$  definimos el *exponente instantáneo de Lyapunov* mediante

$$\lambda^i(\bar{t}, \bar{v}) := \left[ \frac{1}{\|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\|} \frac{d}{dt} \|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\| \right]_{t=\bar{t}}. \quad (3.9)$$

Pero como  $\|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\| = 1$  entonces

$$\frac{d}{dt} \|\Phi(t, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v}\|_{t=\bar{t}} = \lambda^i(\bar{t}, \bar{v}). \quad (3.10)$$



Nótese que además,

$$\begin{aligned}\|h(t)\| &= \sqrt{h(t)^t h(t)}, \\ \frac{d}{dt}\|h(t)\| &= \frac{1}{2\sqrt{h^t h}} 2h^t h',\end{aligned}$$

por lo que,

$$\lambda^i(\bar{t}, \bar{v}) = \bar{v}^t \Phi(\bar{t}, (\bar{t}, \text{Id})) \Phi'(\bar{t}, (\bar{t}, \text{Id})) \bar{v} = \bar{v}^t D_x f(\bar{x}) \bar{v} = \bar{v}^t D_x f(x(\bar{t})) \bar{v}. \quad (3.11)$$

Esta magnitud nos da una idea de cuanto divergen en un instante dos órbitas perturbadas por una cantidad infinitamente pequeña en la dirección de  $\bar{v}$ . A continuación introducimos una magnitud que indique la divergencia en media a lo largo de toda una trayectoria.

Consideramos ahora una perturbación en el instante inicial dada por un vector  $v_0$ . Esta perturbación inicial generará una perturbación en un tiempo futuro  $\bar{t}$  dada por:

$$\bar{v} = \frac{\Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id})) v_0}{\|\Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id})) v_0\|} = \bar{v}(v_0). \quad (3.12)$$

El exponente de Lyapunov para esta dirección, en  $\bar{t}$ , vendría dado por (ver definición 3.1 con  $\bar{v}$  dado por 3.12):

$$\lambda^i(\bar{t}, \bar{v}) = \frac{1}{\|\Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id})) v_0\|^2} v_0^t (\Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id})))^t D_x f(\bar{x}) \Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id})) v_0. \quad (3.13)$$

Este exponente depende en realidad de  $(\bar{t}, v_0)$  con lo cual podríamos introducir la siguiente definición:

$$\bar{\lambda}^i(\bar{t}, v_0) := \lambda^i(\bar{t}, \bar{v}(v_0)). \quad (3.14)$$

Para estimar la sensibilidad de la órbita a pequeñas perturbaciones en la dirección  $v_0$  promediamos en el tiempo estos exponentes de Lyapunov, con lo cual tenemos:

**Definición 3.2.** Dada una dirección  $v_0$  y un tiempo  $t$  se define el exponente característico *promediado* como

$$\lambda(v_0) := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \bar{\lambda}^i(s, v_0) ds \quad (3.15)$$

Veamos a continuación que esta definición coincide con la definición habitual en la literatura [7].

**Proposición 3.3.** *Tenemos que*

$$\lambda(v_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|\Phi(t, (t_0, \text{Id})) v_0\|. \quad (3.16)$$

*Demostración.* Desarrollamos a continuación la expresión (3.15). Para ello introducimos la función

$$g(t) := \frac{1}{2} \ln \|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\|^2 = \ln \|\Phi(\bar{t}, (t_0, \text{Id}))v_0\|. \quad (3.17)$$

Está claro que

$$\begin{aligned} g(t_0) &= \frac{1}{2} \ln \|v_0\|^2 = \frac{1}{2} \ln(1) = 0, \\ g'(t) &= \frac{1}{2\|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\|^2} 2v_0^t (\Phi(t, (t_0, \text{Id})))^t \Phi'(t, (t_0, \text{Id}))v_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Empleando (3.13), (3.15) y (3.18) deducimos una expresión alternativa para el exponente característico promediado:

$$\lambda(v_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\| \quad (3.19)$$

que es la definición habitual de exponente característico de Lyapunov. □

**Observación:** Podríamos llegar a esta misma expresión empleando otros argumentos más intuitivos pero menos rigurosos. Partiendo de la solución del problema de valor inicial no lineal (3.1) construimos la solución del sistema linealizado con condición inicial  $v_0$ :

$$\begin{cases} z'(t) = D_x f(x(t))z(t), \\ z(t_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Nótese que:  $z(t) \equiv \Phi(t)v_0$ .

Nos interesamos por la evolución de su norma  $\|z(t)\|$  buscando un comportamiento exponencial:

$$\|z(t)\| = e^{\tilde{\lambda}(t-t_0)}, \quad (3.21)$$

expresión que define  $\tilde{\lambda}(t)$  por

$$\tilde{\lambda}(t, v_0) = \frac{1}{t - t_0} \ln \|z(t)\| = \frac{1}{t - t_0} \ln \|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\| \quad (3.22)$$

a comparar con (3.16).

### 3.2. Exponentes característicos de Lyapunov

A continuación veremos que la función  $\lambda(\cdot)$  (exponente promediado de Lyapunov) alcanza tan solo  $n$  valores siendo  $n$  la dimensión de la EDO. Estos  $n$  valores recibirán el nombre de exponentes característicos de Lyapunov. (Ver definición 3.7)

Para demostrar el resultado, para un  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  fijado introducimos el conjunto

$$V(\lambda^*) := \{v \in \mathbb{R}^n / \lambda(v) \leq \lambda^*\}. \quad (3.23)$$

Para el cual tenemos los siguientes resultados:

**Proposición 3.4.** *Los conjuntos  $V(\lambda^*)$  definidos en (3.23) verifican:*

- Si  $\lambda_1^* \leq \lambda_2^* \Rightarrow V(\lambda_1^*) \subset V(\lambda_2^*)$
- $V(\lambda^*)$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$

*Demostración.* El primer punto resulta evidente.

Para demostrar el segundo punto probaremos que dados  $v_1 \in V(\lambda^*)$ ,  $v_2 \in V(\lambda^*)$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  entonces  $\lambda v \in V(\lambda^*)$  y  $v_1 + v_2 \in V(\lambda^*)$ .

$$\begin{aligned} \lambda(\mu v_1) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t)(\mu v_1)\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \{\ln |\mu| + \ln \|\Phi(t)(v_1)\|\} \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t)(v_1)\| = \lambda(v_1) \leq \lambda^* \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \lambda(v_1 + v_2) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi(t)(v_1 + v_2)\| \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (\|\Phi(t)(v_1)\| + \|\Phi(t)(v_2)\|) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (2 \max\{\|\Phi(t)(v_1)\|, \|\Phi(t)(v_2)\|\}) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (\max\{\|\Phi(t)(v_1)\|, \|\Phi(t)(v_2)\|\}) \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \max\{\ln (\|\Phi(t)(v_1)\|), \ln (\|\Phi(t)(v_2)\|)\} \\ &\leq \max \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (\|\Phi(t)(v_1)\|), \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (\|\Phi(t)(v_2)\|) \right\} \\ &= \max\{\lambda(v_1), \lambda(v_2)\} \leq \lambda^* \end{aligned} \quad (3.25)$$

Como queríamos demostrar. □

**Observación:** Nótese que la definición de exponente promediado no necesitaría a priori que el vector que lo define tenga norma 1, sin embargo el exponente instantáneo sí lo necesitaría.

Para ser más precisos tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 3.5.** *La aplicación  $\lambda(\cdot) \rightarrow \dim(V(\lambda^*))$  es creciente. Por otra parte existen  $\bar{n}$  valores  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{\bar{n}}$  con  $\bar{n} \leq n$  donde es discontinua. Por último, para cada  $\lambda_i$  existe un  $v_i \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\lambda(v_i) = \lambda_i$ .*

*Demostración.* De lo visto anteriormente ya tendríamos probado las dos primeras afirmaciones, veamos la última.

Para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, los espacios vectoriales

$$V_{i-1} = V(\lambda_i - \varepsilon) \subsetneq V(\lambda_i + \varepsilon) = V_i \quad (3.26)$$

no coinciden. Por ello debe existir

$$v_i \in V(\lambda_i + \varepsilon) \text{ tal que } v_i \notin V(\lambda_i - \varepsilon) \quad (3.27)$$

y por ello

$$\lambda(v_i) \leq \lambda_i + \varepsilon \text{ y } \lambda(v_i) > \lambda_i - \varepsilon. \quad (3.28)$$

Pero debido a (3.26) este vector no depende de  $\varepsilon$  (con tal de que sea suficientemente pequeño) por lo que de (3.28) se deduce:

$$\lambda(v_i) \leq \lambda_i \text{ y } \lambda(v_i) \geq \lambda_i \quad (3.29)$$

es decir,

$$\lambda(v_i) = \lambda_i.$$

□

Por último vemos que  $\lambda(\cdot)$  alcanza solamente esos valores.

**Proposición 3.6.** *La aplicación  $\lambda(\cdot)$  alcanza solamente los valores  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$ , de la Proposición 3.5.*

*Demostración.* Supongamos que se alcanza algún otro valor  $\bar{\lambda}$ , entonces debe existir

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^n / \lambda_i < \bar{\lambda} = \lambda(\bar{v}) \text{ con } \bar{\lambda} < \lambda_j \quad \forall j > i. \quad (3.30)$$

Sabemos que

$$V(\lambda^*) = V_i \quad \forall \lambda^* \in (\lambda_i, \bar{\lambda} + \varepsilon) \quad (3.31)$$

al menos para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño. En particular

$$V(\mu) \equiv V(\bar{\lambda}) \equiv V_i \quad \forall \mu \in (\lambda_i, \bar{\lambda}).$$

Pero,

$$\lambda(\bar{v}) = \bar{\lambda} > \mu \Rightarrow \bar{v} \in V(\bar{\lambda}) \quad \text{y} \quad \bar{v} \notin V(\mu) \quad (3.32)$$

lo cual es una contradicción. □

Todo esto motiva a la siguiente definición.

**Definición 3.7.** Llamaremos exponentes característicos de Lyapunov a los números  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{n}}$  introducidos en la proposición anterior.

**Proposición 3.8.** Supongamos  $f \in \mathcal{C}^1$  y que la órbita no tiende a un punto de equilibrio y está acotada, entonces sean  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{n}}$  los exponentes característicos de Lyapunov, se tiene que existe un  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$  tal que,  $\lambda_i = 0$ .

*Demostración.* La demostración detallada se puede ver en [6], aquí mostraremos un esbozo de la misma.

Consideramos la siguiente EDO

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.33)$$

y el sistema linealizado asociado

$$\begin{cases} z'(t) = D_x f(x(t))z, \\ z(t_0) = v_0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Se define el exponente característico de Lyapunov como

$$\lambda(v_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|z\|. \quad (3.35)$$

Nuestro objetivo será construir una solución del linealizado  $z(\cdot)$  tal que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|z\| = 0.$$

Tomamos  $z(t) := x'(t)$  entonces tenemos

$$z'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t)) = D_x f(x(t))x' = D_x f(x(t))z$$

En consecuencia,  $z(t)$  es solución del sistema linealizado.

Sea la condición inicial

$$v_0 := x'(t_0) = f(x(t_0)) = f(x_0) \neq 0$$

entonces nuestro objetivo será probar que  $\lambda(v_0) \leq 0$ .

Por hipótesis tenemos que  $f$  es continua y se anula en un número finito de puntos y que  $x(\cdot)$  es acotada y no tiende a un punto de equilibrio. Entonces,

$$\|f(x(t))\| \leq cte, \forall t \geq 0$$

lo cual implica que

$$|z| \leq cte$$

ya que,  $|z| = |x'(t)| = |f(x(t))| \leq cte$ . Como consecuencia tenemos que

$$\lambda(v_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|z\| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln(cte) = 0.$$

Entonces,  $\lambda(v_0) \leq 0$ . Veamos que es igual a cero.

Sea  $\varepsilon > 0$  existirá un  $\bar{t} \geq t_0$  suficientemente grande tal que si  $t > \bar{t}$  tendremos que

$$\frac{1}{t - t_0} \ln \|z\| = \frac{1}{t - t_0} \ln \|x'\| < \lambda + \varepsilon < 0.$$

Tomando  $\lambda' := \lambda + \varepsilon$  y

$$v(t) = v_0 e^{-|\lambda'|}(t - t_0) = v_0 e^{\lambda'}(t - t_0)$$

tenemos que

$$\|x'\| = \|z\| \leq \|v_0\| e^{-|\lambda'|}(t - t_0), \quad \forall t \geq \bar{t}$$

y esto nos conduce a que

$$\|x'(t)\| = \|f(x(t))\| = \|z(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Es decir,  $x(t)$  tiende a un punto de equilibrio, en contradicción a las hipótesis propuestas. Concluimos así que

$$\lambda(v_0) = 0.$$

□

Para finalizar esta sección veamos como calcular los exponentes característicos de Lyapunov.

### 3.2.1. Cálculo de los LCE

Veremos que esta tarea no será trivial. Las dificultades que surgirán motivarán la sección posterior.

Para calcular estos números parece claro que debemos evaluar  $\lambda(\cdot)$  para algún vector  $v \in \mathbb{R}^n$ , usando, por ejemplo, la fórmula (3.16). Esta operación puede resultar complicada debido a las dificultades numéricas. En efecto, las magnitudes  $\|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\|$  podrían crecer o decrecer exponencialmente rápido, lo cual conduciría a un problema de *overflow* o *underflow* rápidamente. Para evitar este contratiempo podemos ver lo siguiente.

Sea  $T > 0$  arbitrario, un tiempo característico, usando la fórmula (3.15) tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+\bar{k}T} \bar{\lambda}^i(s, v_0) ds &= \sum_{k=1}^{\bar{k}} \int_{t_0+(k-1)T}^{t_0+kT} \bar{\lambda}^i(s, v_0) ds \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{k}} (g(t_0 + kT) - g(t_0 + (k-1)T)) \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{k}} \ln \frac{\|\Phi(t_0 + kT)v_0\|}{\|\Phi(t_0 + (k-1)T)v_0\|} \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{k}} \ln \left\| \Phi(t_0 + kT)v_0 \frac{1}{\|\Phi(t_0 + (k-1)T)v_0\|} \right\| \\
&= \sum_{k=1}^{\bar{k}} \ln \|\Phi(t_0 + kT, (t_0 + (k-1)T, \text{Id}))v_{k-1}\|.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Donde  $v_k$  es el vector unitario definido por:

$$v_k := \frac{\Phi(t_0 + kT, (t_0, \text{Id}))v_0}{\|\Phi(t_0 + kT, (t_0, \text{Id}))v_0\|}. \tag{3.37}$$

En consecuencia, podemos resolver el problema (3.1) para a continuación calcular  $z_{k-1}(\cdot)$  solución de:

$$\begin{cases} z'_{k-1}(t) = D_x f(x(t))z_{k-1}(t), \\ z_{k-1}(t_0 + (k-1)T) = v_{k-1}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Tendremos finalmente:

$$\int_{t_0}^{t_0+\bar{k}T} \bar{\lambda}^i(s, v_0) ds = \sum_{k=1}^{\bar{k}} \ln \|z_{k-1}(t_0 + kT)\| \tag{3.39}$$

y entonces:

$$\lambda(v_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \left[ \sum_{k=1}^{\frac{t}{T}} \ln \|z_{k-1}(t_0 + kT)\| + \ln \|z_{\frac{t}{T}}(t)\| \right] \tag{3.40}$$

donde  $z$  es solución de (3.38).

Dado que este razonamiento se puede realizar para cualquier  $T > 0$ , bastará tomarlo de tal modo que las soluciones

$$z_{k-1}(t)$$

adquieran valores razonables en el intervalo

$$[t_0 + (k-1)T, t_0 + kT].$$

Es decir, que las magnitudes  $\|\Phi(t, (t_0, \text{Id}))v_0\|$  crezcan o decrezcan moderadamente.

Una segunda dificultad que se nos presenta en el cálculo de estos exponentes,  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, \bar{n}\}$  es que tendríamos que seleccionar un  $v_i \in V_i \equiv V(\lambda_i)$  tal que  $v_i \notin V_{i-1} = V(\lambda_{i-1})$  y evaluar  $\lambda(v_i)$ . En ese caso

$$\lambda_{i-1} < \lambda(v_i) \leq \lambda_i \Rightarrow V(\lambda_i) = \lambda_i.$$

Dado que estos espacios  $V_i = V(\lambda_i)$  no se conocen a priori esto muestra que si tomamos un  $v \in \mathbb{R}^n$  arbitrario, digamos de forma aleatoria, tendremos que  $\lambda(v) = \lambda_n$ , siendo  $\lambda_n$  el mayor de todos. Esto se dará con probabilidad uno, ya que la dimensión de  $V_{\bar{n}-1}$  es estrictamente inferior a la dimensión de  $V_{\bar{n}}$  ( $V_{\bar{n}-1}$  tendría medida nula como subvariedad de  $V_{\bar{n}}$ ). Veámoslo con la siguiente ilustración:

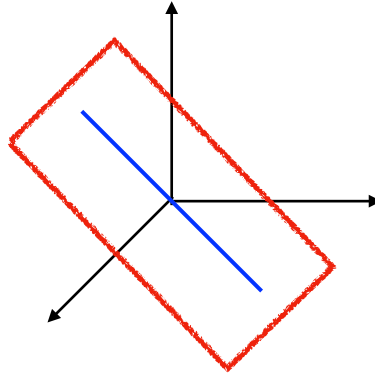


Figura 3.1: Representación esquemática de los espacios  $V(\lambda)$  en un caso de dimensión 3.

Si la perturbación estuviera en la recta tendríamos el menor exponente, en cambio si la perturbación estuviese en el plano pero no en la recta entonces obtendríamos el segundo exponente mientras que si la perturbación no está en el plano, y por tanto tampoco en la recta, entonces obtendremos el mayor exponente de todos.

Este es el motivo por el que necesitamos introducir los exponentes característicos de Lyapunov de orden superior.

### 3.3. Exponentes de Lyapunov de orden superior

De la definición vista en la sección anterior (3.7) se deduce entonces que el número de exponentes de Lyapunov no es superior a  $n$ , la dimensión del espacio, y que los  $V(\lambda^*)$  a



partir de unos valores aislados de  $\lambda^*$  cambian de dimensión, lo que hace que el cálculo sea muy difícil para calcular los exponentes característicos de Lyapunov que no sean el mayor. Entonces, para calcular los demás vamos a introducir los llamados exponentes de orden superior ( $p > 1$ ).

Se trata de reproducir el proceso explicado anteriormente con la diferencia de que en vez de observar como cambian las distancias entre las órbitas ahora veremos como cambian las áreas perturbadas al propagarlas mediante el flujo del linealizado (de modo más genérico, como cambian los p-volúmenes).

Consideramos las condiciones iniciales infinitamente pequeñas en un politopo engendrado por  $p$  vectores, que propagaremos por el linealizado (ver figura 3.2).

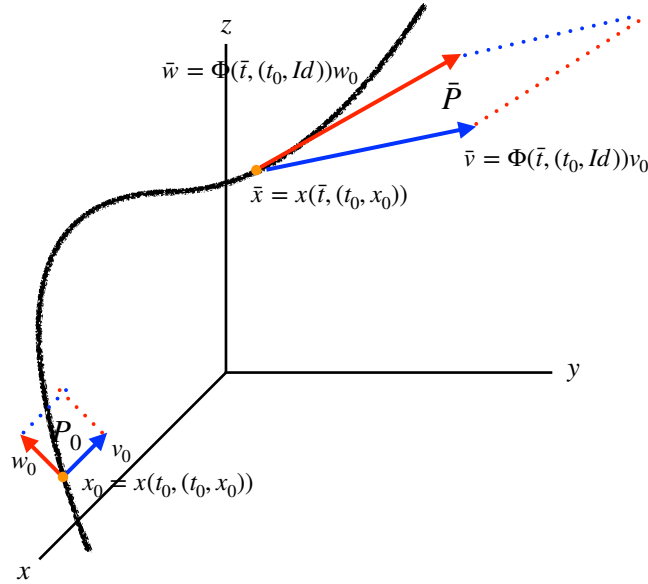


Figura 3.2: Imagen por el linealizado de un paralelogramo para  $p = 2$ .

Vamos a presentar un par de propiedades que cumplirán estos p-volúmenes.

- **Propiedad 1:** Si se amplían los vectores  $v_0$  y  $w_0$  (ver figura 3.2), es decir, si hacemos  $\mu v_0$  y  $\eta w_0$  con  $\mu, \eta > 0$  entonces los correspondientes  $\bar{v}$  y  $\bar{w}$  también se amplían, sin embargo, el cociente entre el área generada por  $\bar{P}$  y  $P_0$  no varía, se mantiene constante.
- **Propiedad 2:** Si se toman otros dos vectores  $\bar{v}_0$  y  $\bar{w}_0$  unitarios que están en el mismo espacio vectorial que generan  $v_0$  y  $w_0$  entonces las áreas de los paralelogramos pueden

ser diferentes pero el cociente de ambas tampoco varía.

Para definir adecuadamente los exponentes de Lyapunov de orden superior es útil la herramienta del álgebra exterior (ver apéndice 4.3).

**Observación:** Estas propiedades son trivialmente generalizadas a cualquier dimensión  $p > 2$ .

Entonces si partimos de dos vectores unitarios  $v_0, w_0$  tenemos que

$$\|v_0 \wedge w_0\|_2^2 = \det \begin{pmatrix} \|v_0\|^2 & \langle v_0, w_0 \rangle \\ \langle w_0, v_0 \rangle & \|w_0\|^2 \end{pmatrix}.$$

Y se tiene que

$$Vol_2(P_0) = \|v_0 \wedge w_0\|_2$$

y en consecuencia con lo visto,

$$Vol_2(\bar{P}) = \|\Phi(\bar{t})v_0 \wedge \Phi(\bar{t})w_0\|_2.$$

Entonces veamos de manera generalizada a orden  $p$  como calcularíamos los exponentes característicos de Lyapunov de orden elevado.

Nos interesará estudiar el siguiente cociente

$$h(t, (v_0 \wedge \dots \wedge v_p)) = \frac{\|\Phi(\bar{t})v_0 \wedge \dots \wedge \Phi(\bar{t})v_p\|_p}{\|v_0 \wedge \dots \wedge v_p\|_p} \simeq e^{\lambda^{pD}(v_0 \wedge \dots \wedge v_p)(\bar{t}-t_0)} \quad (3.41)$$

Postulando esta magnitud con una dependencia exponencial para tiempos cercanos a  $t_0$  tendríamos la siguiente definición:

**Definición 3.9.** Se define el exponente instantáneo de orden elevado por

$$\lambda^{i,pD}(t_0, (v_0 \wedge \dots \wedge v_p)) = \frac{1}{h(t_0, (v_0 \wedge \dots \wedge v_p))} \frac{d}{dt} h(t, (v_0 \wedge \dots \wedge v_p)). \quad (3.42)$$

Para finalizar y en acorde con lo explicado en la anterior sección tenemos que el exponente característico de Lyapunov de orden elevado se deduce de promediar en el tiempo estos exponentes instantáneos

$$\lambda^{pD}(v_0 \wedge \dots \wedge v_p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \lambda^{i,pD}(s, (v_0 \wedge \dots \wedge v_p)) ds \quad (3.43)$$

y por lo tanto, tenemos la siguiente definición:

**Definición 3.10.** Se definen los exponentes característicos de Lyapunov de orden elevado de la siguiente manera

$$\lambda^{pD}(v_0 \wedge \dots \wedge v_p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \|\Phi(t, (t_0, Id))v_0 \wedge \dots \wedge \Phi(t, (t_0, Id))v_p\|. \quad (3.44)$$

Siguiendo las ideas expuestas en la sección 3.2 y dado que  $\dim(\wedge^p(V)) = \binom{n}{p}$  ver apéndice 4.3 ecuación (13)) se tiene que estos  $\lambda^p$  alcanzan  $\binom{n}{p}$  valores.

**Observación:** Cabe notar que el  $\lambda^{pD}$  no significa otra cosa que indicar que están ligados a cambios de p-volúmenes.

Se puede demostrar (ver [8]) que esos  $\binom{n}{p}$  valores coinciden con la suma de  $p$  exponentes característicos de Lyapunov de orden 1 (nótese que ese conjunto tiene cardinalidad  $\binom{n}{p}$ ).

El algoritmo a través del cual calculamos estos exponentes se puede seguir en el artículo [8]:

Según la figura 3.3 el proceso para calcular los exponentes de orden superior es el siguiente: en primer lugar vemos como evoluciona la distancia del vector  $v_1$ , después observamos como evoluciona el área generada por los vectores  $v_1$  y  $v_2$  y finalmente como evoluciona el volumen generado por  $v_1, v_2, v_3$ .

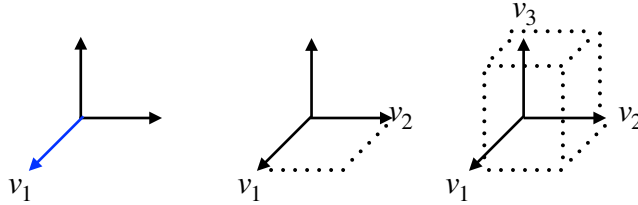


Figura 3.3: Proceso para calcular los exponentes de orden superior.

Vamos a introducir la siguiente definición,

**Definición 3.11.** Llamaremos exponentes característicos de Lyapunov de orden  $p$  a los  $\binom{n}{p}$  valores distintos y los denotaremos por  $\lambda_i^{pD}$ ,  $i \in \left\{1, \dots, \binom{n}{p}\right\}$ .

**Observación:** La anterior definición generaliza la definición proporcionada para el caso 1D.

**Proposición 3.12.** Se tiene que cada uno de los  $\lambda_k^{pD}$  es igual a la suma de  $p$  valores  $\lambda_j^{1D}$ , es decir,  $\lambda_k^{pD} = \sum_{j=1}^p \lambda_{k_j}^{1D}$  donde los  $k_j \in \{1, \dots, n\}$  (ver [8]).

Veamos como calcular las contribuciones a los exponentes en un caso 3 dimensional:

Sean  $v_1, v_2, v_3$  entonces tenemos que:

- $\lambda^{3D}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{1D}$
- $\lambda^{2D}(v_1 \wedge v_2) = \sum_{i=1}^2 \lambda_{k_i}^{1D}$
- $\lambda^{1D}(v_1) = \lambda_k^{1D}$

En la práctica si tomamos los  $v_i$  aleatoriamente, con probabilidad 1, tendremos:

- $\lambda^{3D}(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{1D}$
- $\lambda^{2D}(v_1 \wedge v_2) = \sum_{i=2}^3 \lambda_i^{1D}$
- $\lambda^{1D}(v_1) = \lambda_n^{1D}$

Entonces tenemos que para calcular los exponentes de orden superior deberíamos realizar unas restas para obtener los valores  $\lambda(v_i)^{1D}$  pero esto en la práctica no se hace pues si tomamos los vectores ortogonales tenemos que

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|_p^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \cdots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \cdots & \|v_p\|^2 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

y por tanto el determinante de la matriz anterior se reduce al producto de su diagonal, por esta razón cuando calculamos los exponentes característicos de Lyapunov de orden superior tenemos la siguiente situación

$$\ln \|v_p\|^2 = \ln \left( \prod_{i=1}^p \|v_i\|^2 \right) - \ln \left( \prod_{i=1}^{p-1} \|v_i\|^2 \right). \quad (3.46)$$

por consiguiente el cálculo es inmediato sin la necesidad de realizar ninguna resta.

Los códigos de programación en los cuales se ha programado este algoritmo se pueden ver en el apéndice 4.3.

## Capítulo 4

# Aplicaciones

La teoría del caos es la rama de las matemáticas, la física y otras ciencias como la biología, meteorología, entre otras, que trata cierto tipo de sistemas complejos y sistemas dinámicos no lineales muy sensibles a las variaciones en las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones en dichas condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el comportamiento futuro, imposibilitando la predicción a largo plazo. Esto sucede aunque estos sistemas son en rigor deterministas, es decir, su comportamiento puede ser completamente determinado conociendo sus condiciones iniciales.

Un sistema caótico es un sistema que no es inestable sino que si dos soluciones se mantienen cerca a una distancia finita de un atractor del sistema dinámico, entonces las soluciones se mueven en torno al atractor de manera irregular y pasado el tiempo ambas soluciones dejan de ser cercanas pero si cualitativamente similares. De esta forma, el sistema permanece en una zona de su espacio de estados pero sin tender a un atractor fijo.

Ejemplos de sistemas caóticos incluyen el Sistema Solar, las placas tectónicas, los fluidos en un régimen turbulento y los crecimientos de población.

### 4.1. Atractor de Lorenz

El atractor de Lorenz es un concepto introducido por Edward Lorenz en 1963 [3]. Es un sistema dinámico determinista tridimensional no lineal derivado de las ecuaciones simplificadas de los rolos de convección que se producen en las ecuaciones dinámicas de la atmósfera terrestre. Mientras Edward Lorenz esperaba que sus ecuaciones predijeran el tiempo en la atmósfera, él trató mediante el uso de ordenadores de ver gráficamente el comportamiento de sus ecuaciones, pero los resultados no eran los esperados, se encontró con la figura que hoy en día conocemos como el atractor de Lorenz (Ver figura 4.6).

Edward Lorenz pensó que había cometido algún error pero después de ejecutar varias

veces el programa ha logrado siempre la misma figura hasta que se dio cuenta de que algo pasaba con su sistema. Después de estudiar detenidamente el problema y hacer distintas pruebas variando los parámetros, Lorenz llegó a la conclusión de que las simulaciones eran muy diferentes para condiciones iniciales muy cercanas con lo que concluyó que existía una dependencia extrema de las condiciones iniciales de su problema.

Por otra parte, Lorenz también percibió que las soluciones de su sistema aunque oscilaban de forma irregular y sin repetirse siempre lo hacían en una región acotada del espacio de fases, vio que las trayectorias de las órbitas rondaban siempre alrededor de lo que ahora se conoce como atractor extraño.

El atractor de Lorenz es, quizás, uno de los diagramas de sistemas caóticos más conocidos, no sólo porque fue uno de los primeros, sino porque también es uno de los más complejos y peculiares, pues desenvuelve una forma particular, parecida a las alas de una mariposa. De este hecho resultó el llamado *efecto mariposa*, hipersensibilidad a las condiciones iniciales. Este sistema aparece en láseres, en generadores eléctricos y en determinadas ruedas de agua.

Definimos entonces el sistema de Lorenz como

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - xz - y \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (4.1)$$

cuya matriz jacobiana es la siguiente

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

como vemos la traza de la matriz jacobiana es constante, esto va a ser de especial interés a la hora de calcular los exponentes característicos de Lyapunov, pues va a ser una herramienta que nos permita saber si el cálculo es correcto.

Supondremos en todo momento que los parámetros del sistema de ecuaciones diferenciales satisfacen  $a > 0, b > 0$  y  $c > 0$ .

A continuación probaremos que, para algunos valores determinados de los parámetros, las semiórbitas positivas del sistema de Lorenz están acotadas.

En efecto, si consideramos la siguiente energía

$$E(t) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (z - (a + c))^2). \quad (4.3)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}E(t) &= xx' + yy' + (z - (a + c))z' \\
 &= x(a(y - x)) + y(cx - xz - y) + (z - (a + c))(xy - bz) \\
 &= -ax^2 - y^2 - b(z - \frac{1}{2}(a + c))^2 + \frac{b}{4}(a + c)^2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

En consecuencia tenemos que la energía  $E(\cdot)$  es una función decreciente del tiempo en la región complementaria a

$$S_0 = \left\{ (x, y, z) / ax^2 + y^2 + b(z - \frac{1}{2}(a + c))^2 \leq \frac{b}{4}(a + c)^2 \right\},$$

es decir, fuera del elipsoide considerado. En consecuencia, tomando la esfera

$$R_0 = \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + (z - (a + c))^2 \leq c^2 \},$$

con  $c$  suficientemente grande como para que

$$S_0 \subsetneq R_0,$$

está claro que cualquier órbita que comience en  $R_0$  permanece en  $R_0$  y por consiguiente estará acotada. Para ser más precisos, estas órbitas tienen

- La energía que define la esfera  $R_0$  es creciente en  $S_0$ .
- La energía que define la esfera  $R_0$  es decreciente en el complementario de  $S_0$ .

Si consideramos el flujo de la EDO, que denotaremos por  $\phi_t(\cdot)$ , la región  $R_0$  se ve transportada en otra región

$$R_t := \phi_t(R_0) \subset R_0, \quad \forall t > 0. \tag{4.5}$$

Esto implica que

$$R_0 \supset R_1 = \phi_1(R_0) \supset R_2 \supset \dots \supset R_k. \tag{4.6}$$

En efecto, la primera inclusión 4.6 es consecuencia de 4.5 con  $t = 1$ . Probaremos a continuación que  $R_{k+1} \subset R_k$ . Sea un  $x_{k+1} \in R_{k+1}$ , entonces existe un  $x_0 \in R_0$  tal que  $x_{k+1} = \phi_{k+1}(x_0)$ . Pero

$$x_{k+1} = \phi_k(\phi_1(x_0)) \in R_k,$$

con  $\phi_1(x_0) \in R_1 \subset R_0$  como queríamos demostrar.

El volumen de esta región  $R_t$  viene dada por

$$V_t = \int_{R_t} dx = \int_{R_0} |\det(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 0, x_0))| dx_0.$$

Dado que  $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 0, x_0)$  es solución de la ecuación variacional

$$\begin{cases} \Psi' = Df(x)\Psi \\ \Psi(0) = I \end{cases} \quad (4.7)$$

tenemos usando la identidad de *Abel-Jacobi*

$$\det\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 0, x_0)\right) = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(0, 0, x_0)\right) e^{\int_0^t \text{tr}(Df(x(s)))ds} = e^{-(a+b+1)t},$$

ya que la jacobiana del campo que define el sistema tiene una traza constante, es decir, independiente de la solución de la ecuación. Finalmente obtenemos que

$$V_x = V_0 e^{-(a+b+1)t},$$

es decir, el volumen tiende exponencialmente a cero con el tiempo. En consecuencia, toda órbita que comience en esta esfera tiende a acercarse exponencialmente rápido con el tiempo al conjunto

$$R_\infty = R_0 \cap R_1 \cap \dots \cap R_k \cap \dots$$

que tiene volumen nulo.

Este resultado tiene especial interés pues nos permite relacionar el volumen de la región  $R_t$  con los exponentes característicos de Lyapunov, pues la suma de los tres exponentes coincide con el valor  $-(a+b+1)$ , que es la traza de la matriz jacobiana (4.2).

Este resultado nos da una herramienta para comprobar si efectivamente los cálculos realizados son correctos, lamentablemente esto solo se produce para el sistema de Lorenz, cuya traza de la matriz jacobiana es constante. Para otros sistemas saber con exactitud si los cálculos son correctos se hace más complicado.

Un caso de interés, debido a la riqueza de los resultados sería hacer depender el sistema de un único parámetro, es decir, si hacemos  $b$  parámetro, entonces pondremos  $a$  y  $c$  en función de  $b$ . [3]

Entonces, sea el sistema de Lorenz,

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = cx - xz - y \\ z' = xy - bz \end{cases} \quad (4.8)$$

considerando  $b$  como parámetro tal que  $b \in [0.138, 0.148]$  y

$$a = b + 1 + \sqrt{2(b+1)(b+2)}$$



$$c = a \frac{a + b + 3}{-(-a + b + 1)}$$

Tenemos que la gráfica para los tres exponentes de Lyapunov y la suma de ambos es la siguiente,

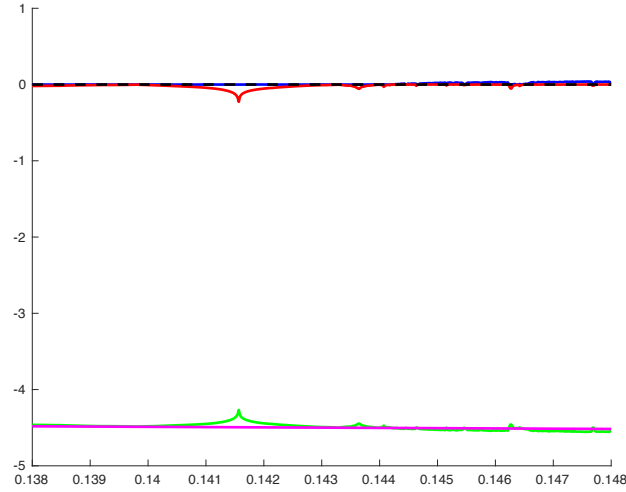
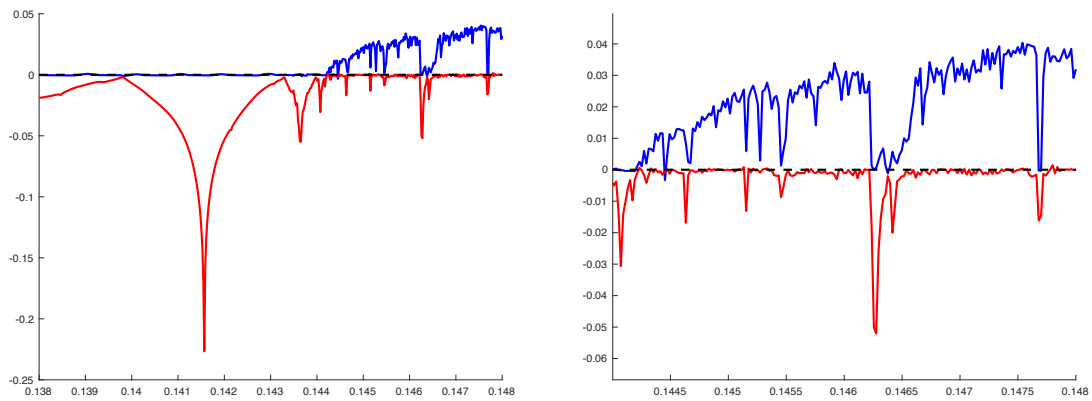


Figura 4.1: Exponentes de Lyapunov y su suma para Lorenz

Si observamos la figura 4.2 en la que hemos hecho un zoom de los dos primeros exponentes podemos observar una gran riqueza de resultados. Vamos a analizarlos.



(a) Primer y segundo exponente.

(b) Zoom para los valores (0.143, 0.148).

Figura 4.2: Zoom para los dos primeros exponentes.

- Para valores de  $b \in [0.138, 0.1441]$  no obtenemos caos, pues ningún exponente de Lyapunov es positivo. Por otra parte vemos claramente la presencia de un superatractor para el valor  $b = 0.1416$  cuya figura del atractor se puede ver en la figura 4.3. Finalmente para el valor  $b = 0.1397$  hay un ciclo de período dos que atrae a las órbitas. (Ver figura 4.4).

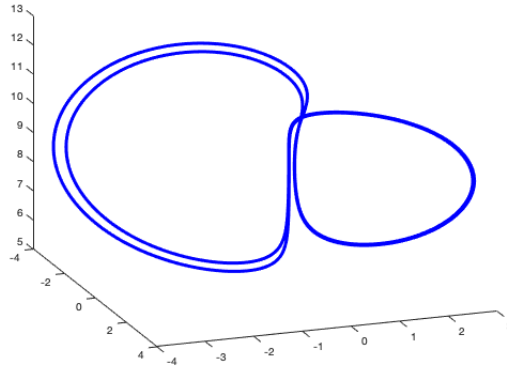


Figura 4.3: Superatractor de Lorenz para  $b = 0.1416$ . Exponentes:  $\lambda_1 = -0.0004$ ,  $\lambda_2 = -0.1427$ ,  $\lambda_3 = -4.3513$ .

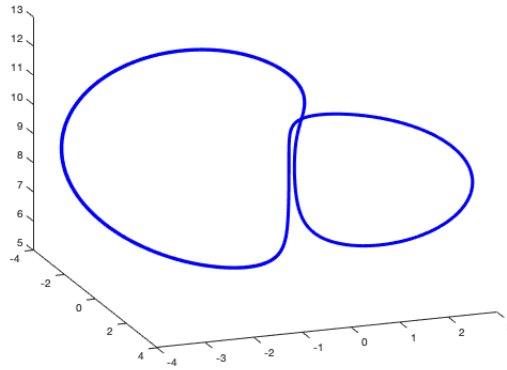


Figura 4.4: Atractor de Lorenz (ciclo de orden 2) para  $b = 0.1397$ . Exponentes:  $\lambda_1 = -0.0004$ ,  $\lambda_2 = -0.0031$ ,  $\lambda_3 = -4.4843$ .

- Para valores de  $b \in [0.1441, 0.148]$  vemos que el primer exponente de Lyapunov se vuelve positivo, y por lo tanto comenzamos a observar caos. Un ejemplo del atractor de Lorenz para un valor caótico se puede ver en la figura 4.5.

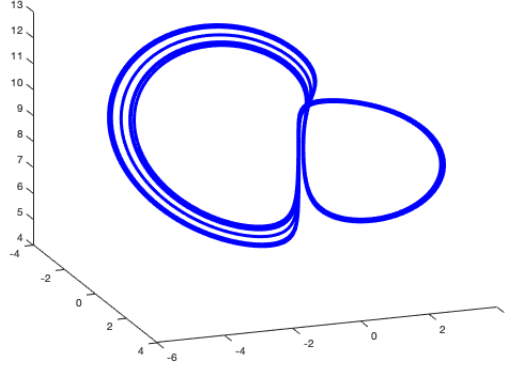


Figura 4.5: Atractor de Lorenz para  $b = 0.147$  Exponentes:  $\lambda_1 = 0.0371, \lambda_2 = -0.0000, \lambda_3 = -4.5503$ .

Finalmente para terminar esta sección es necesario mostrar el caso más nombrado en la bibliografía [3] y en cualquier documento que consultemos sobre el sistema de Lorenz. La llamada *mariposa* (ver figura 4.6) para un caso de caos resultante de darle los siguientes valores a los parámetros del sistema:

$$a = 10, b = \frac{8}{3}, c = 28$$

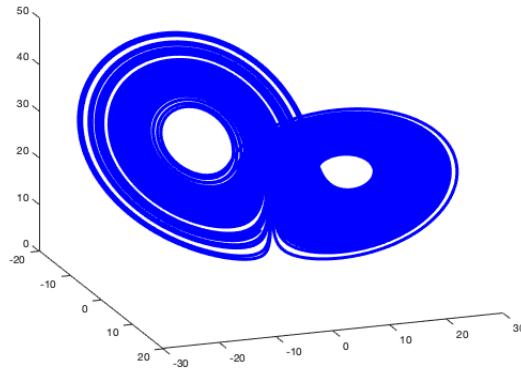


Figura 4.6: Atractor de Lorenz para  $a = 10, b = \frac{8}{3}$  y  $c = 28$ . Exponentes:  $\lambda_1 = 0.8987, \lambda_2 = 0.0021, \lambda_3 = -14.5675$ .

**Observación:** De acuerdo con la proposición vista en el capítulo anterior (3.8) podemos ver en los anteriores ejemplos que si tenemos un órbita acotada entonces uno de los exponentes característicos de Lyapunov siempre es 0.

## 4.2. Rössler

El sistema de Rössler es un sistema tridimensional no lineal estudiado por Otto Rössler en 1976. Estas ecuaciones diferenciales definen un sistema dinámico que muestra situaciones caóticas asociadas con el atractor.

El documento original de Rössler [4] afirma que el atractor de Rössler estaba destinado a comportarse de manera similar al atractor de Lorenz (ver sección 4.1), pero también a ser más fácil de analizar cualitativamente. Una órbita dentro del atractor sigue una espiral exterior cerca de un punto fijo inestable, una vez que el gráfico gira en espiral lo suficiente, un segundo punto fijo influye en el gráfico, causando un aumento y giro en el eje  $z$ . En el dominio del tiempo, se hace evidente que aunque cada variable está oscilando dentro de un rango fijo de valores, las oscilaciones son caóticas.

Otto Rössler diseñó el atractor pero luego se descubrió que las ecuaciones originalmente teóricas eran útiles para modelar el equilibrio en reacciones químicas.

El sistema de Rössler es el siguiente

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + z(x - c) \end{cases} \quad (4.9)$$

cuya matriz jacobiana es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - c \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

**Observación:** A diferencia del sistema de Lorenz vemos que la traza de la matriz jacobiana no es constante, con lo que el argumento de la traza para comprobar que el cálculo de los exponentes es correcto no es posible en este caso, con lo que su verificación se hace más complicada.

Ahora bien, al igual que en la sección anterior vamos a considerar el siguiente caso de interés. Consideramos los parámetros  $a, b$  fijos y hacemos variar  $c$  del siguiente modo:

$$a = 0.1, b = 0.1, c \in [2, 18]$$

cuya gráfica de los tres exponentes de Lyapunov y su suma se puede ver en la figura 4.7.

Nuevamente si hacemos un zoom a los dos primeros exponentes tenemos la figura 4.8.

Vamos a analizar los resultados vistos:

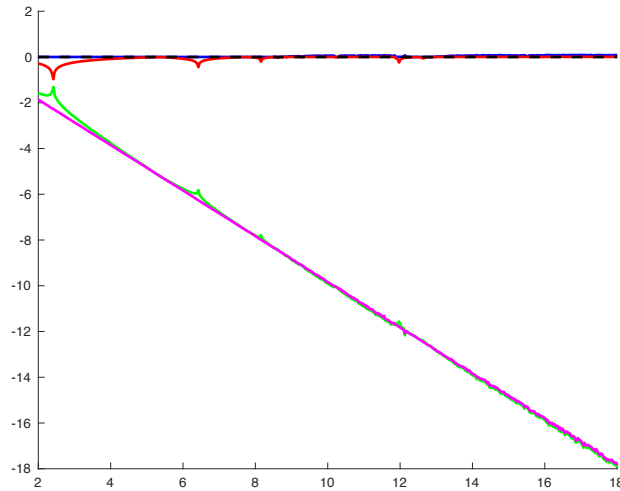


Figura 4.7: Exponentes de Lyapunov y su suma para Rössler

- Para valores de  $c \in [2, 9)$  vemos que el primer exponente es prácticamente nulo, con lo cual no tenemos caos. Como ocurría en el sistema de Lorenz también tenemos un superatractor para un valor aproximado a  $c = 2.4$ .

Por otra parte destacar que para valores de  $c = 4$  tenemos un ciclo de período 1, para  $c = 6$  un ciclo de período 2, para  $c = 8.5$  un ciclo de período 4 y para  $c = 8.7$  un ciclo de período 8. (Ver figura 4.9).

- Para valores de  $c \in [9, 18]$  vemos que el primer exponente se vuelve notablemente positivo y por tanto tenemos una zona caótica. ( Ver figura 4.10).

Si observamos con atención la figura ampliada 4.8 vemos que para el valor  $c = 18$  hay una zona bastante más caótica que para el valor  $c = 9$  (Ver 4.11).

Cabe resaltar que para valores de  $c$  comprendidos entre  $[12, 13]$  el primer exponente vuelve a valer prácticamente 0 volviendo así a la existencia de ciclos de período 3 y 6 para valores de  $c$  igual a 12 y 12.6 respectivamente. (Ver figura 4.12).

Para finalizar, en la múltiple bibliografía que se puede consultar, entre ellas [4], para el sistema de Rössler los valores habituales de los parámetros para observar caos son los siguientes:

$$a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$$

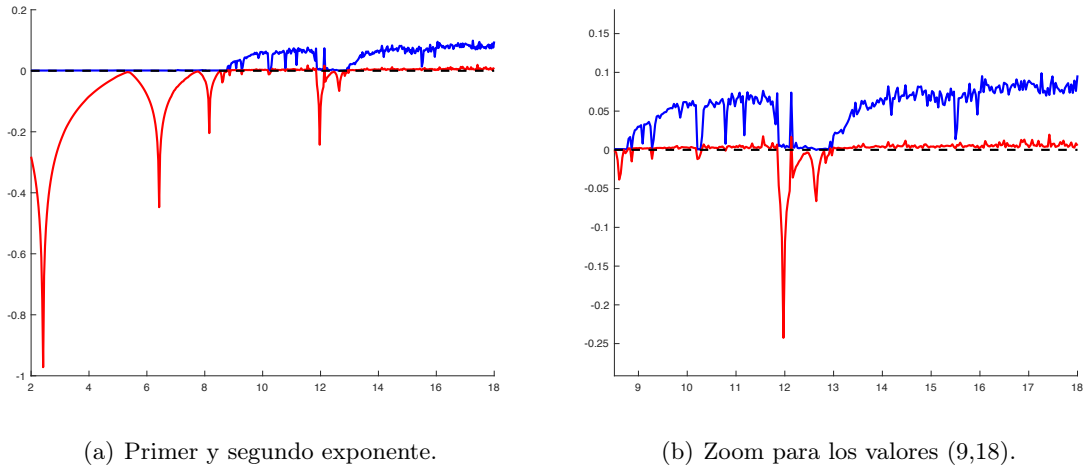


Figura 4.8: Zoom para los dos primeros exponentes.

Para los cuales tenemos la figura 4.13.

### 4.3. HyperChaos

Un atractor hipercaótico se define usualmente como un sistema que presenta un comportamiento caótico con al menos dos exponentes característicos de Lyapunov positivos. Además de poseer un exponente nulo y otro negativo para así asegurar el límite de la solución. Por lo tanto es importante resaltar que la dimensión mínima para tener un sistema hipercaótico continuo es dimensión 4.

El primer sistema tetradimensional fue propuesto en 1979 por Rössler [5],

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay + w \\ z' = b + xz \\ w' = -cz + dw \end{cases} \quad (4.11)$$

cuya matriz jacobiana es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ z & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -c & d \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

del mismo modo que para el sistema de Rössler vemos que la traza de la matriz jacobiana

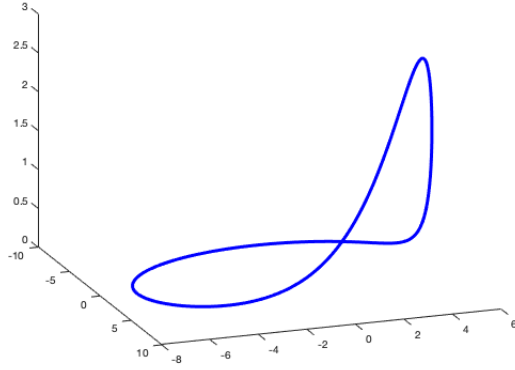
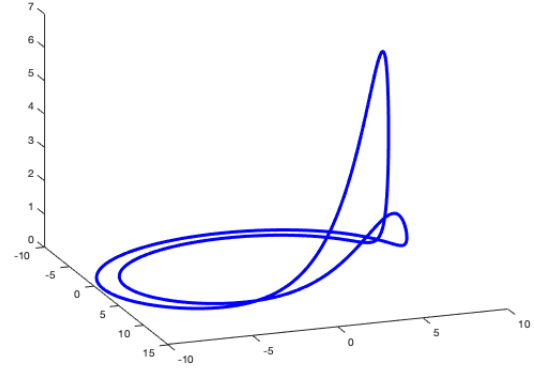
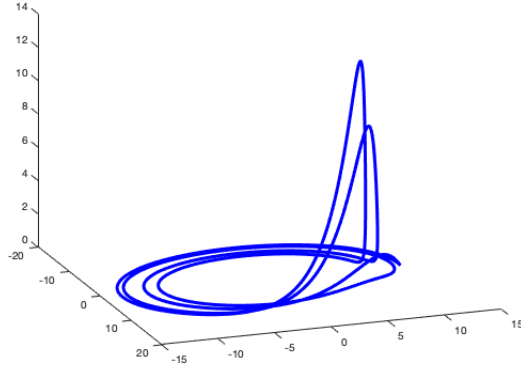
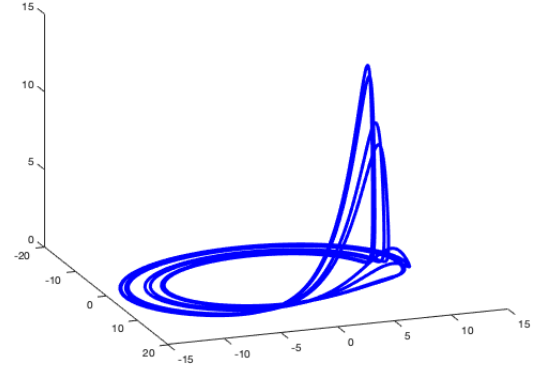
(a)  $c = 4$ , período 1.(b)  $c = 6$ , período 2.(c)  $c = 8.5$ , período 4.(d)  $c = 8.7$ , período 8.

Figura 4.9: Distintos tipos de ciclos para el sistema de Rössler

no es constante, esto nos lleva a deducir la gran importancia y peculiaridad que el sistema de Lorenz aporta.

Finalmente en la literatura [5] nos podemos encontrar con los siguientes valores para los parámetros del sistema (4.11) en el que obtenemos un comportamiento hipercaótico. Estos son

$$a = 0.25, b = 3, c = 0.5, d = 0.05$$

para los cuales obtenemos los cuatro exponentes característicos de Lyapunov correspondientes

$$\lambda_1 = 0.0930, \lambda_2 = 0.0211, \lambda_3 = 0.0004, \lambda_4 = -22.6686$$

Las distintas representaciones tridimensionales del atractor hipercaótico son las siguientes

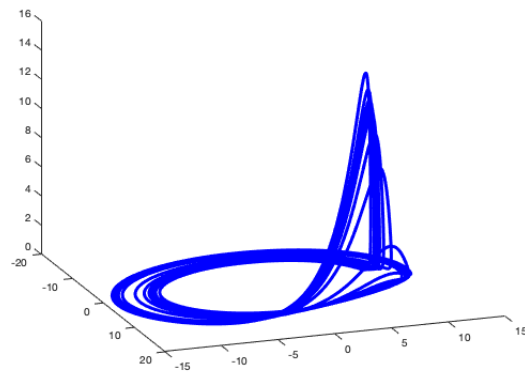


Figura 4.10: Atractor de Rössler para un valor caótico  $c = 9$ . Exponentes:  $\lambda_1 = 0.0303$ ,  $\lambda_2 = 0.0017$ ,  $\lambda_3 = -8.8669$ .

(ver figura 4.14).



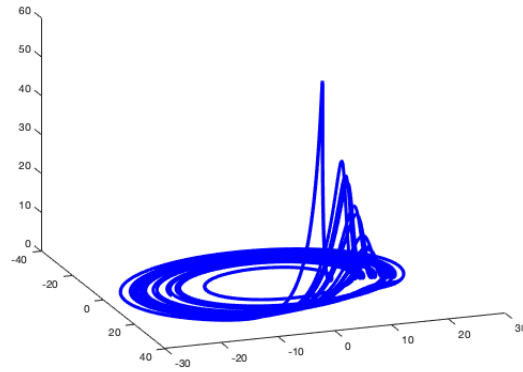
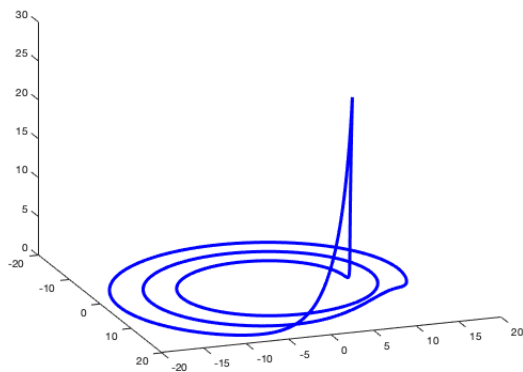
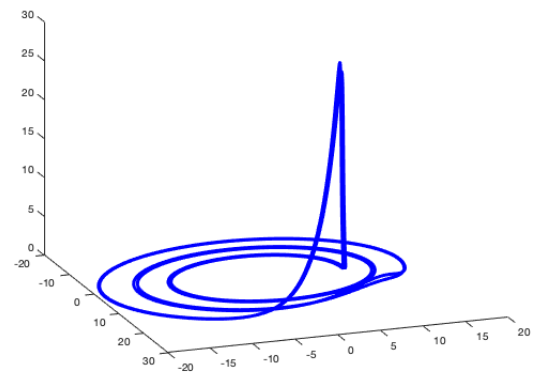


Figura 4.11: Atractor de Rössler para un valor caótico  $c = 18$ . Exponentes:  $\lambda_1 = 0.0961$ ,  $\lambda_2 = 0.0055$ ,  $\lambda_3 = -17.9360$ .



(a)  $c = 12$ , período 3.



(b)  $c = 12.6$ , período 6.

Figura 4.12: Ciclos para el sistema de Rössler

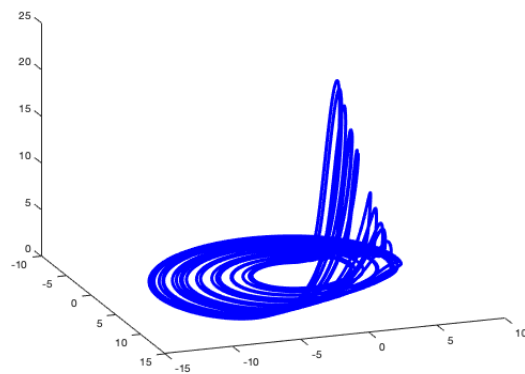


Figura 4.13: Atractor de Rössler para  $a = 0.2, b = 0.2$  y  $c = 5.7$ . Exponentes:  $\lambda_1 = 0.0711, \lambda_2 = 0.0006, \lambda_3 = -5.3957$ .

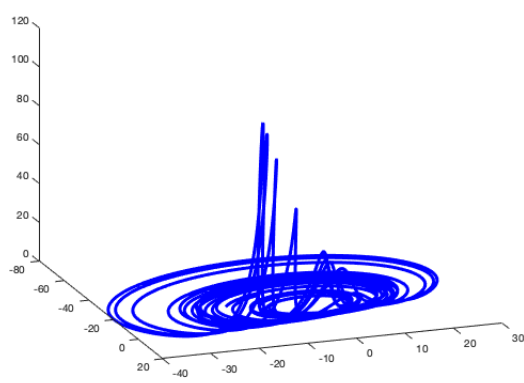
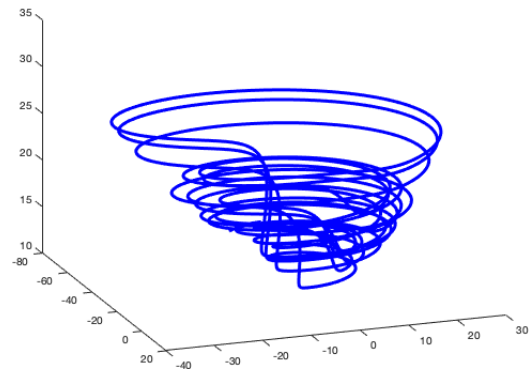
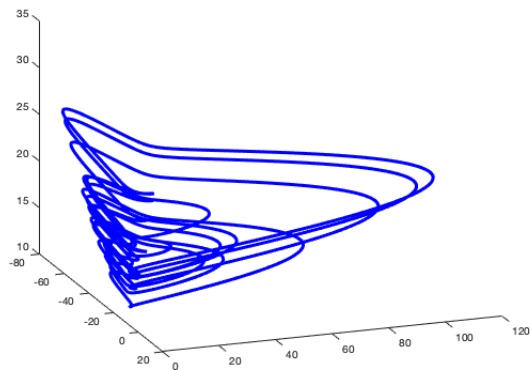
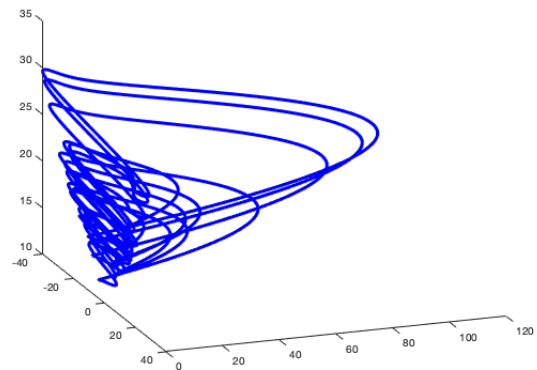
(a)  $t = 0$ .(b)  $z = 0$ .(c)  $y = 0$ .(d)  $x = 0$ .

Figura 4.14: Proyecciones de la órbita sobre los espacios dados por  $t = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$  respectivamente.



# Apéndices



# Álgebra exterior

Antes de comenzar resaltar que no entraremos en profundidad en este tema ni en sus detalles más complejos, definiremos los resultados necesarios que tomamos como herramienta para resolver aquellas cuestiones que se nos presentan en el trabajo relacionado con el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov.

El álgebra exterior es el sistema algebraico cuyo producto es el llamado producto exterior. El álgebra exterior nos proporciona un entorno algebraico que nos sirve para calcular cuestiones geométricas, como áreas o volúmenes.

El producto exterior de dos vectores  $v$  y  $w$ , que se denota por  $v \wedge w$ , habita en un espacio llamado el espacio exterior de orden 2,  $\bigwedge^2$ , que es un espacio vectorial diferente del espacio original de los vectores  $v$  y  $w$ . Este producto se puede interpretar como una clase de equivalencia relacionada con el paralelogramo con lados  $v$  y  $w$ .

Veamos algunas propiedades de este producto:

## Propiedades del producto exterior:

- Es asociativo.  $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$
- Anticonmutativo.  $v \wedge w = -w \wedge v$
- $v \wedge v = 0$
- $\lambda v \wedge w = \lambda(v \wedge w) = v \wedge \lambda w$

**Definición .1.** Se define el espacio exterior de orden  $p$  del espacio  $V$ ,  $\bigwedge^p(V)$ , como el subespacio vectorial de  $\bigwedge(V)$  formado por los elementos

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p \quad v_i \in V, i = 1, 2, \dots, p.$$

**Proposición .2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base de  $V$ , entonces se define una base para  $\bigwedge^p(V)$  del siguiente modo  $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\}$  tal que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ .

La justificación de la definición anterior resulta de que si tenemos un producto exterior de la siguiente forma

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p$$

cada vector  $v_j$  puede escribirse como una combinación lineal de los vectores base  $e_i$ . Usando la bilinealidad del producto exterior, esto puede expandirse a una combinación lineal de productos exteriores de esos vectores base y cualquier producto exterior en el que el mismo vector base aparezca más de una vez es cero. Además cualquier producto exterior en el que los vectores base no aparezcan en el orden adecuado se pueden reordenar. En consecuencia,

$$\dim(\bigwedge^p(V)) = \binom{n}{p}. \quad (13)$$

Ahora vamos a introducir el producto escalar entre elementos de  $\bigwedge^p(V)$

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_p, w_1 \wedge \dots \wedge w_p \rangle_p = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \dots & \langle v_1, w_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, w_1 \rangle & \dots & \langle v_p, w_p \rangle \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Esto permite calcular la norma de un elemento de este espacio,

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|_p^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \langle v_p, v_p \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & \dots & \langle v_1, v_p \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_p, v_1 \rangle & \dots & \|v_p\|^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

finalmente, tenemos que la raíz cuadrada de esta norma coincide con el área del p-volumen correspondiente.

**Observación:** Cabe mencionar que si los vectores  $v_i$  anteriores son ortogonales tendremos que

$$\|v_1 \wedge \dots \wedge v_p\|_p^2 = \det \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \|v_p\|^2 \end{pmatrix} = \|v_1\|^2 \cdot \dots \cdot \|v_p\|^2. \quad (16)$$



# Códigos de programación

## .0.1. Cálculo de los exponentes

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Exponentes.m
% Programa que calcula los CLE con ODE45.
% Aurea Mene Hevia
% Universidad de Santiago de Compostela
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Condicion inicial.

x0 = repmat([0;1;0],1,3);

t0 = 0.0;

z0 = [1.0 0.0 0.0;...
      0.0 1.0 0.0;...
      0.0 0.0 1.0];

% Parametros del sistema de Lorenz.
%alfa[10,16],beta[8/3,4],ro(0,infinity)

%      c = [10;...
%           8/3;...
%           28]

      alfamin = 10;
      alfamax = 10;
```

```

betamin = 8/3;
betamax = 8/3;
romin = 28;
romax = 28;
cBounds = [alfamin betamin romin;...
            alfamax betamax romax];
nb_alfa = 1;
nb_beta = 1;
nb_ro = 1;
alfa = linspace(alfamin,alfamax,nb_alfa);
beta = linspace(betamin,betamax,nb_beta);
ro = linspace(romin,romax,nb_ro);

options = odeset('RelTol',1.e-5);

```

```

%Numero de iteraciones.

```

```

DeltaT = 0.25;

T = 2000.0;

Npas = T/DeltaT;

m = size(z0,1); %Numero de condiciones iniciales

x=x0;
t=t0;
z=z0;

SUM = zeros(m,1);
CLE = zeros(nb_alfa,nb_beta,nb_ro,3);
MLCE = zeros(m,1);

figure(1);
clf
hold on

```

```

figure(2)
clf
hold on

for i_alfa = 1:nb_alfa
    i_alfa
    for i_beta = 1:nb_beta

        for i_ro = 1:nb_ro

            x=x0;
            t=t0;
            z=z0;
            c = [ alfa(i_alfa);beta(i_beta);ro(i_ro) ];
            f = @(t,xz) LorenzfDxf(t,xz,c);

            SUM = zeros(m,1);

            LE = [Inf;Inf;Inf];

for k=1:Npas

            tspan = [(k-1)*DeltaT+t0,k*DeltaT+t0];

            for i = 1:m

                xz = [x(:,i);z(:,i)];
                [t,xz] = ode45(f,tspan,xz,options);

                if k>7500

                    figure(1)
                    plot(t,xz(:,1),'b-',t,xz(:,2),'r-',t,
                        xz(:,3),'g-', 'Linewidth',3)
                    figure(2)
                    plot3(xz(:,1),xz(:,2),xz(:,3),'b-', '

```

```

        Linewidth',3)
        drawnow

    end

    t = t(end);
    xz = xz(end,:)';

    z(:,i) = xz(m+1:end);
    x(:,i) = xz(1:m);

end

% Calculos de las contribuciones a los exponentes

x = repmat(xz(1:m,1),1,3);
z = GramSchmidtOrth(z);
r = sqrt(sum(z.^2,1));
z = z./repmat(r,size(z,1),1);

SUM = SUM + log(r)';
CLE(i_alfa,i_beta,i_ro,:) = SUM/(tspan(2)-t0);

% Test de parada por si ya alcanzamos la
    estabilidad

    tol = 1.e-6;

    LU = SUM/(tspan(2)-t0);

    if norm((LU-LE)./(1+norm(LU,Inf)),Inf)<tol

        [k,Npas]
        disp('Se_ha_cumplido_el_test_de_parada')
        break;

```

```

        else

            LE = LU;

        end

    end

    [i_alfa,i_beta,i_ro,CLE(i_alfa,i_beta,i_ro,1),CLE(
        i_alfa,i_beta,i_ro,2),CLE(i_alfa,i_beta,i_ro,3)]

    end

end

end
end

```

*% Representacion grafica de los exponentes y su suma*

```

figure(3)
clf;
hold on;

% Si varia el parametro alfa

plot(alfa,CLE(:,1,1,1),'b-o','Linewidth',4)
plot(alfa,CLE(:,1,1,2),'r-o','Linewidth',4)
plot(alfa,CLE(:,1,1,3),'g-o','Linewidth',4)
plot(alfa,CLE(:,1,1,1)+CLE(:,1,1,2)+CLE(:,1,1,3),'m-o','Linewidth',4)

plot(alfa,alfa*0,'k—','Linewidth',4)

```

*% Si varia el parametro beta*

```

plot(beta,CLE(1,(:,1,1,1),'b-o','Linewidth',4)
plot(beta,CLE(1,(:,1,1,2),'r-o','Linewidth',4)

```

```

plot(beta,CLE(1, :, 1, 3), 'g-o', 'Linewidth', 4)
plot(beta,CLE(1, :, 1, 1)+CLE(1, :, 1, 2)+CLE(1, :, 1, 3), 'm-o', '
    Linewidth', 4)

```

```

plot(beta,beta*0,'k—', 'Linewidth', 4)

```

```

% Si varia el parametro ro

```

```

v1=zeros(4,1);
v2=zeros(4,1);
v3=zeros(4,1);
vsum=zeros(4,1);

for i = 1:nb_ro
    v1(i) = CLE(1,1,i,1);
    v2(i) = CLE(1,1,i,2);
    v3(i) = CLE(1,1,i,3);
    vsum(i) = sum(CLE(1,1,i,:));
end

plot(ro,v1,'b-o','Linewidth',4)
plot(ro,v2,'r-o','Linewidth',4)
plot(ro,v3,'g-o','Linewidth',4)
plot(ro,vsum,'m-o','Linewidth',4)

plot(ro,ro*0,'k—', 'Linewidth', 4)

```

## .0.2. Algoritmo Gram-Schmidt modificado

```

function v = GramSchmidtOrth(v)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% GramSchmidtOrth.m
% Programa que realiza el metodo GramSchmidtOrth
% Aurea Mene Hevia
% Universidad de Santiago de Compostela
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Ejemplo:
%
% consideramos 2 vectores v1=[3;1] , v2=[2;2]
% Primero los colocamos en una matriz, ya que los vectores se
%     establecen en forma de columna
% v = [3 2;1 2]
%
% A = GramSchmidtOrth(v)
%
% A =
%     0.9487    -0.3162
%     0.3162     0.9487
%
% prueba para asegurarse de que es correcto
%
% dot(A(:,1),A(:,2))
%
% ans =
%     0
%
k = size(v,2);

for ii = 1:1:k
    for jj = ii+1:1:k
        v(:,jj) = v(:,jj) - proj(v(:,ii),v(:,jj));
    end
end

```

```
function w = proj(u,v)
    % Esta funcion proyecta el vector v en el vector u
    w = (dot(v,u) / dot(u,u)) * u;
end

end
```



# Bibliografia

- [1] Perko Lawrence, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd ed.
- [2] Wanner G., Hairer E., *Solving Ordinary Differential Equations V.I*, 2nd ed.
- [3] Lorenz Edward, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Volumen 20. Massachusetts Institute of Technology (1963).
- [4] Rössler O.E, *An Equation For Continuous Chaos*, Volumen 57A, N° 5. Germany (1976).
- [5] Rössler O.E, *An Equation For Hyperchaos*, Volumen 71A, N° 2,3. Germany (1979).
- [6] Haken H., *At Least One Lyapunov Exponent Vanishes If The Trajectory Of An Attractor Does Not Contain A Fixed Point*, Volumen 94A, N° 2. Germany (1982).
- [7] Barreira Luís, *Lyapunov Exponents*, Birkhäuser.
- [8] Benettin Giancarlo, Galgani Luigi, Giorgilli Antonio, Strelcyn Jean-Marie. *Lyapunov Characteristic Exponents For Smooth Dynamical Systems And For Hamiltonian Systems; A Method For Computing All Of Them.*, (1980).